

3

EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES

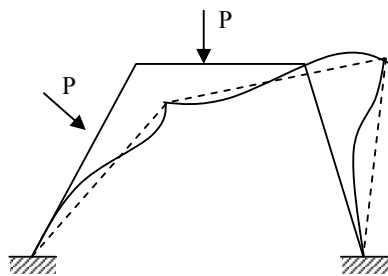
3.1- CONSIDERACIONES GENERALES.

Las estructuras sufren en general al estar sometidas a un estado de solicitaciones, un estado de deformaciones, como consecuencia de un estado de cargas.

Así las distintas partes que conforman la estructura tendrán en general traslaciones y rotaciones que conformaran el estado de deformación de la estructura, dependiendo el mismo del tipo de estructura, sus características geométricas y elásticas y del estado de cargas.

Veamos que sucede con un pórtico plano sometido a esfuerzos normales, de corte y momentos flectores a fin de plantear su resolución por el Método de las Deformaciones.

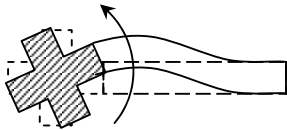
A cada estado de deformación corresponde un estado de sollicitación, por lo cual a partir de aquellas podemos calcular estas últimas.



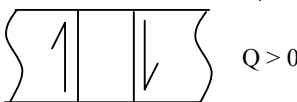
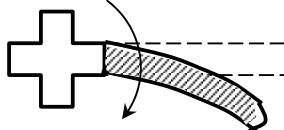
Llamaremos ahora la atención sobre consideraciones que debemos tener en cuenta para la aplicación del método que desarrollaremos, en el cual estudiaremos que ocurre con una barra genérica que forma parte de la estructura, definiendo características y convenciones de signos a utilizar. Con referencia a estos últimos no existe unanimidad; en e curso trataremos de utilizar convenciones generales que luego adaptaremos a los distintos casos.

3.2- CONVENCION DE SIGNOS DE SOLICITACIONES Y DEFORMACIONES

$M > 0$ Acción de NUDO sobre la BARRA



$M > 0$ Acción de la BARRA sobre el NUDO



en el caso de tracción.

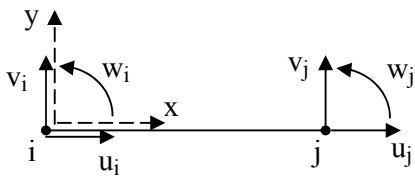
Utilizaremos las siguientes convenciones de signos:

a) Los momentos de acción y reacción entre el extremo de la barra y el nudo se consideran positivos cuando la acción del NUDO sobre la BARRA tienda a girarla en sentido contrario a las agujas del reloj, o lo que es lo mismo, cuando la acción de la BARRA sobre el NUDO tiende a que este gire en el sentido de las agujas del reloj. Es inmediato por el principio de acción y reacción que las dos figuras representan el mismo fenómeno, que produce tracción en las fibras superiores de la barra al llegar al nudo de la figura.

b) El esfuerzo de corte Q se considerará positivo cuando en una sección dada, la acción de la izquierda sobre la derecha tenga sentido hacia arriba.

c) El esfuerzo normal N se considerará positivo

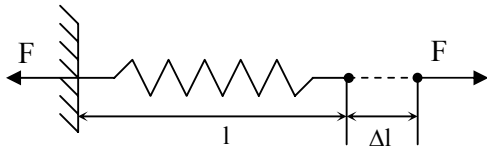
Respecto a los desplazamientos u, v, w en una barra sobre la cual aplicamos un par de ejes locales x, y , como se indican en la figura, se adoptan como positivos los señalados en la misma



$u > 0$ Desplazamiento en la dirección y sentido del eje x .
 $v > 0$ Desplazamiento en la dirección y sentido del eje y .
 $w > 0$ Rotación en sentido contrario a las agujas del reloj
 Las acciones F_x, F_y, M en los extremos de las barras serán también positivas cuando coincidan con el sentido positivo de u, v, w .

3.3- LA BARRA RECTA

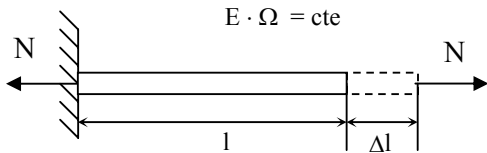
Antes de analizar una barra sometida a varios efectos y sollicitaciones estudiaremos el caso mas simple de un resorte como el de la figura, cargado con una fuerza F que produce un desplazamiento Δl tal que:



$$\Delta l = \delta \cdot F \quad \text{y} \quad F = k \cdot \Delta l$$

con $k = \delta^{-1}$

δ = Coeficiente de flexibilidad = valor de Δl para un $F = 1$
 k = Coeficiente de rigidez = Valor de F para un $\Delta l = 1$



En caso de una barra de sección constante traccionada, por la ley de Hooke es inmediato:

$$\Delta l = \frac{l}{E\Omega} \cdot N \quad \text{con} \quad \delta = \frac{l}{E\Omega}$$

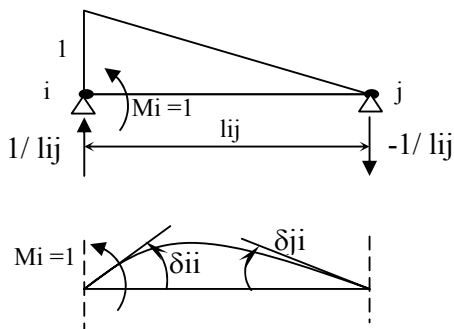
$$N = \frac{E\Omega}{l} \cdot \Delta l \quad \text{con} \quad k = \frac{E\Omega}{l}$$

3.3.1- LA BARRA ARTICULADA-ARTICULADA CON ACCIONES EN LOS NUDOS

Analicemos una barra $i-j$ a la cual se le aplican por sus extremos o nudos un estado de desplazamientos u, v, w asociado a fuerzas o sollicitaciones F_x, F_y, M .

a) Rotaciones $w_i; w_j$

Aplicamos $M_i = 1$ y aparecerán rotaciones δ_{ii} y δ_{ji} que se pueden calcular por el P.T.V. o por Mohr y que según vimos en (1-5) representan:

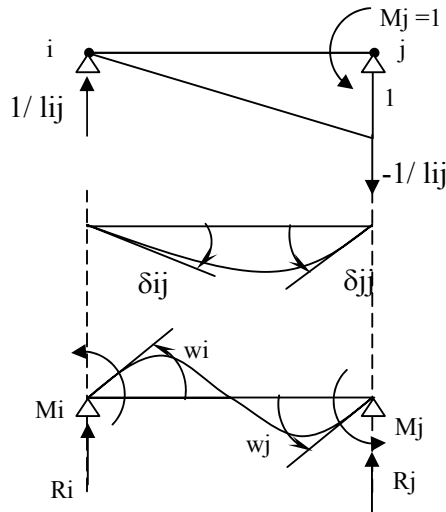


δ_{ii} = rotación en i para $M_i = 1$
 δ_{ji} = rotación en j para $M_i = 1$
 Además aparecen reacciones en un sentido y , iguales a $1/lij$ y $-1/lij$

Con el mismo procedimiento, si aplicamos en j un $M_j = 1$ aparecerán rotaciones y reacciones:

$$\delta_{ij}; \delta_{jj} \quad \text{y} \quad 1/l_{ij}; -1/l_{ij}$$

Por superposición de efectos al aplicar momentos M_i ; M_j aparecerán en los extremos rotaciones w_i ; w_j y reacciones R_i ; R_j :



$$w_i = \delta_{ii} \cdot M_i + \delta_{ij} \cdot M_j$$

$$w_j = \delta_{ji} \cdot M_i + \delta_{jj} \cdot M_j \quad \text{con } \delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$R_i = \left(\frac{M_i + M_j}{l_{ij}} \right)$$

$$R_j = - \left(\frac{M_i + M_j}{l_{ij}} \right)$$

De estas últimas ecuaciones podemos explicitar M_i M_j en función de w_i w_j , donde denominando con $|\delta_{ij}|$ al determinante de los coeficientes:

$$|\delta_{ij}| = \delta_{ii} \cdot \delta_{jj} - \delta_{ij} \cdot \delta_{ji} = \delta_{ii} \cdot \delta_{jj} - \delta_{ij}^2$$

obtendremos:

$$M_i = \frac{\delta_{jj}}{|\delta_{ij}|} w_i - \frac{\delta_{ij}}{|\delta_{ij}|} w_j$$

$$M_j = - \frac{\delta_{ji}}{|\delta_{ij}|} w_i + \frac{\delta_{ii}}{|\delta_{ij}|} w_j$$

$$R_i = \frac{(\delta_{jj} - \delta_{ji})}{|\delta_{ij}|} \cdot \frac{w_i}{l_{ij}} + \frac{(\delta_{ii} - \delta_{ij})}{|\delta_{ij}|} \cdot \frac{w_j}{l_{ij}}$$

$$R_j = - \frac{(\delta_{jj} - \delta_{ji})}{|\delta_{ij}|} \cdot \frac{w_i}{l_{ij}} - \frac{(\delta_{ii} - \delta_{ij})}{|\delta_{ij}|} \cdot \frac{w_j}{l_{ij}}$$

Con los coeficientes:

$$k_{ii} = \frac{\delta_{jj}}{|\delta_{ij}|} \quad ; \quad k_{ij} = - \frac{\delta_{ij}}{|\delta_{ij}|} \quad ; \quad k_{ji} = - \frac{\delta_{ji}}{|\delta_{ij}|} \quad k_{jj} = \frac{\delta_{ii}}{|\delta_{ij}|}$$

obtendremos:

$$M_i = k_{ii} \cdot w_i + k_{ij} \cdot w_j$$

$$M_j = k_{ji} \cdot w_i + k_{jj} \cdot w_j$$

$$R_i = (k_{ii} + k_{ji}) \cdot \frac{w_i}{l_{ij}} + (k_{ij} + k_{jj}) \cdot \frac{w_j}{l_{ij}}$$

$$R_j = -(k_{ii} + k_{ji}) \cdot \frac{w_i}{l_{ij}} - (k_{ij} + k_{jj}) \cdot \frac{w_j}{l_{ij}}$$

dónde los "Coeficientes de Rigidez" k representan:

k_{ii} = momento M_i para $w_i = 1$ y $w_j = 0$

k_{ij} = momento M_i para $w_i = 0$ y $w_j = 1$

k_{ji} = momento M_j para $w_i = 1$ y $w_j = 0$

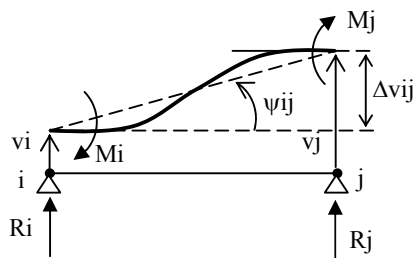
k_{jj} = momento M_j para $w_i = 0$ y $w_j = 1$

b) Desplazamientos v_i ; v_j según eje y

Aplicamos desplazamientos v_i ; v_j tales que:

$$\Delta v_{ij} = v_j - v_i \quad \psi_{ij} = \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}} = \frac{v_j - v_i}{l_{ij}} \quad \text{siendo además } w_i = w_j = 0$$

Aparecerán solicitaciones M_i M_j R_i R_j cuyos valores obtendremos de una viga similar a la anterior con rotaciones w_i^* ; w_j^* tales que:



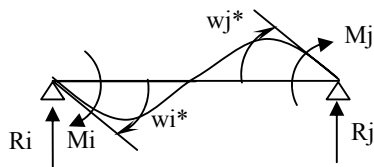
$$w_i^* = w_j^* = -\psi_{ij} = -\frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}} = -\frac{v_j - v_i}{l_{ij}}$$

Se cumplirá entonces:

$$M_i = \frac{\delta_{ij}}{|\delta_{ij}|} \cdot w_i^* - \frac{\delta_{ij}}{|\delta_{ij}|} \cdot w_j^* = k_{ii} \cdot w_i^* + k_{ij} \cdot w_j^*$$

y por lo tanto:

$$M_i = -(k_{ii} + k_{ij}) \cdot \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}} = -(k_{ii} + k_{ij}) \cdot \frac{v_j - v_i}{l_{ij}}$$



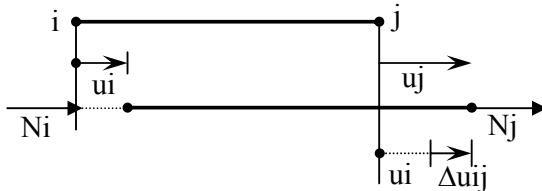
análogamente

$$M_j = -(k_{ji} + k_{jj}) \cdot \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}} = -(k_{ji} + k_{jj}) \cdot \frac{v_j - v_i}{l_{ij}}$$

$$R_i = -(k_{ii} + k_{jj} + 2k_{ij}) \cdot \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}^2} = -(k_{ii} + k_{jj} + 2k_{ij}) \cdot \frac{v_j - v_i}{l_{ij}^2}$$

$$R_j = (k_{ii} + k_{jj} + 2k_{ij}) \cdot \frac{\Delta v_{ij}}{l_{ij}^2} = (k_{ii} + k_{jj} + 2k_{ij}) \cdot \frac{v_j - v_i}{l_{ij}^2}$$

c) Desplazamientos u_i ; u_j según eje x



Aplicamos desplazamientos u_i u_j ,
siendo además nulos los desplazamientos:

$$w_i = w_j = v_i = v_j$$

El alargamiento de la barra está dado por:

$$\Delta u_{ij} = u_j - u_i$$

Por equilibrio se cumple: $N_i = -N_j$

$$\Delta u_{ij} = \int_0^{l_{ij}} \frac{N_j}{\Omega_{ij}} \cdot \frac{dx}{E} = N_j \cdot \int_0^{l_{ij}} \frac{dx}{\Omega_{ij} \cdot E} = u_j - u_i$$

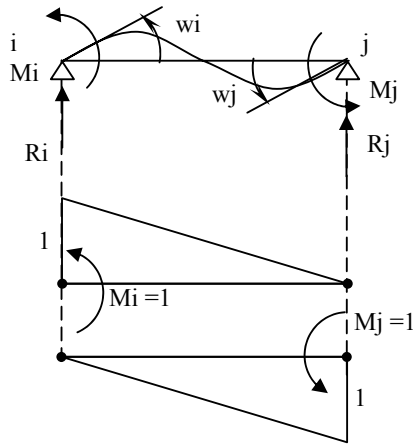
$$N_j = -N_i = \frac{\Delta u_{ij}}{\int_0^{l_{ij}} \frac{dx}{\Omega_{ij} \cdot E}} = \frac{(u_j - u_i)}{\int_0^{l_{ij}} \frac{dx}{\Omega_{ij} \cdot E}}$$

3.3.2- LA BARRA RECTA DE RIGIDEZ CONSTANTE

Analicemos la misma barra recta anterior para el caso particular de que a lo largo de toda la longitud E ; I_{ij} ; l_{ij} son constantes:

a) Rotaciones w_i ; w_j

Para este caso particular es inmediato:



$$\delta_{ii} = \int_0^{l_{ij}} \frac{M_i \cdot M_i}{E \cdot I_{ij}} dx = \int_0^{l_{ij}} \frac{M_j \cdot M_j}{E \cdot I_{ij}} dx = \delta_{jj} = \frac{l_{ij}}{3E \cdot I_{ij}}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int_0^{l_{ij}} \frac{M_i \cdot M_j}{E \cdot I_{ij}} dx = -\frac{l_{ij}}{6E \cdot I_{ij}}$$

$$|\delta_{ij}| = \frac{l_{ij}^2}{12E^2 I_{ij}^2}$$

Siendo entonces:

$$k_{ii} = k_{jj} = 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}}$$

$$k_{ij} = k_{ji} = 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}}$$

y por lo tanto:

$$w_i = \frac{l_{ij}}{3EI_{ij}} M_i - \frac{l_{ij}}{6EI_{ij}} M_j$$

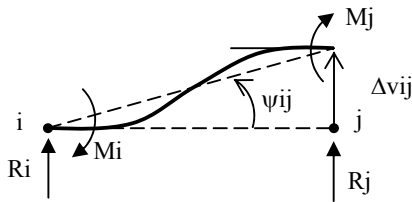
$$w_j = -\frac{l_{ij}}{6EI_{ij}} M_i + \frac{l_{ij}}{3EI_{ij}} M_j$$

y también:

$$M_i = 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_i + 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_j$$

$$M_j = -2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_i + 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_j$$

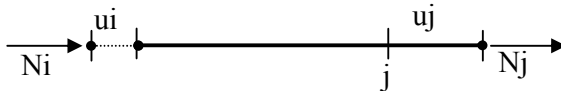
$$R_i = -R_j = 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} w_i + 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} w_j$$

b) Desplazamientos v_i, v_j según eje y Remplazando los k en 3.3.1-b)

$$M_i = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} \Delta v_{ij} = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} (v_j - v_i) = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}} \psi_{ij}$$

$$M_j = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} \Delta v_{ij} = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} (v_j - v_i) = -6 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}} \psi_{ij}$$

$$R_i = -R_j = -12 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^3} \Delta v_{ij} = -12 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^3} (v_j - v_i) = -12 \frac{E \cdot I_{ij}}{l_{ij}^2} \psi_{ij}$$

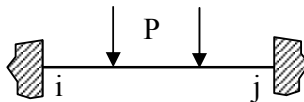
c) Desplazamientos u_i, u_j según eje x 

$$\text{Será: } \int_0^{l_{ij}} \frac{dx}{E\Omega_{ij}} = \frac{l_{ij}}{E\Omega_{ij}}$$

$$\Delta u_{ij} = u_j - u_i = N_j \cdot \frac{l_{ij}}{E\Omega_{ij}}$$

$$N_j = -N_i = \frac{E\Omega_{ij}}{l_{ij}} \cdot \Delta u_{ij} = \frac{E\Omega_{ij}}{l_{ij}} \cdot (u_j - u_i)$$

Analizada la barra $i-j$ bajo distintos tipos de acciones pasaremos a continuación al planteo del Método para la solución de sistemas hiperestáticos.

3.4- EL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES

Consideremos una barra ij de la estructura empotrada elásticamente en los dos nudos y analicémosla para distintos casos de cargas o acciones a los que pueda estar sometida, como ser las cargas exteriores que actúan sobre el tramo y las acciones (deformaciones o sollicitaciones) que le transmitan los nudos.

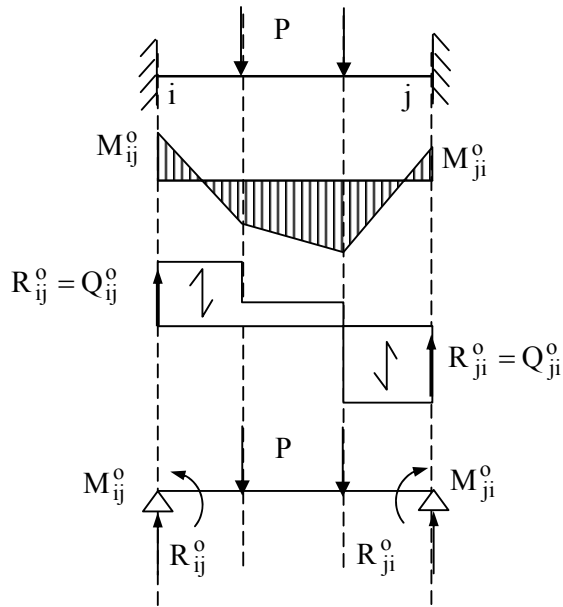
Al efecto de una mejor percepción del fenómeno pensemos que en el plano cada uno de los extremos tiene tres grados de libertad o posibilidad de desplazamiento:

- Una rotación w que produce momentos flectores y esfuerzos de corte.
- Un desplazamiento v que produce momentos flectores y esfuerzos de corte.
- Un desplazamiento u que produce esfuerzos normales

Al igual que en el Método de las Fuerzas despreciamos la influencia del esfuerzo Normal en el estado de deformaciones, y por lo tanto (cuando se plantea en forma manual el método) no tendremos en cuenta el punto c.

Por ultimo explicitemos que al existir cargas en el tramo se producirán solicitaciones en la barra, independientemente de las que se produzcan por la acción de los nudos i-j.

3.4.1- BARRA EMPOTRADA BAJO CARGAS EN EL TRAMO



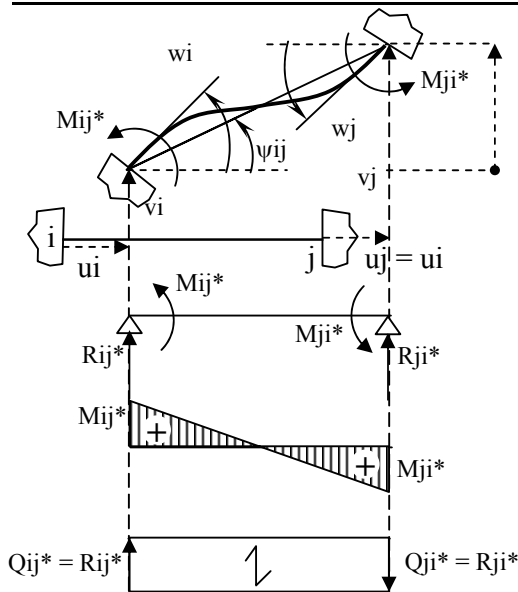
A partir de aquí consideramos solo el caso de la barra de sección constante, a sea, $EI_{ij} = cte.$; $\Omega_{ij} = cte.$ para, mas adelante, considerar en forma especial el caso de barras acarteladas.

Con el fin de superponer efectos, en primer lugar, supongamos una barra perfectamente empotrada en sus extremos (deformaciones nulas en los nodos) y sometida a cargas P externas en los tramos.

Denominaremos como M_{ij}^0 ; M_{ji}^0 los momentos en los nudos y con Q_{ij}^0 ; Q_{ji}^0 los esfuerzos de corte o reacciones en dichos extremos. La ultima figura representa una barra equivalente en la cual los M_{ij}^0 ; M_{ji}^0 ; R_{ij}^0 ; R_{ji}^0 pueden

ser obtenidos de tablas o manuales para los estados de cargas más usuales y en función de ellas se pueden obtener a lo largo de la barra las solicitaciones: Momentos flectores, esfuerzos de corte y normales de la barra doblemente empotrada.

3.4.2- LA BARRA BAJO DESPLAZAMIENTOS u, v, w



Al no considerar deformaciones debido a esfuerzos normales la longitud l_{ij} de la barra no varia al igual que $u_i = u_j$. En cambio w_i , w_j y $\psi_{ij} = \frac{v_j - v_i}{l_{ij}}$ producirán solicitaciones que señalaremos con un * que valorizaremos según (3.3.2) a) y b).

$$M_{ij}^* = 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_i + 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_j - 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} \psi_{ij}$$

$$M_{ji}^* = 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_i + 4 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} w_j - 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} \psi_{ij}$$

$$R_{ij}^* = -R_{ji}^* = 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} w_i + 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} w_j - 12 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} \psi_{ij}$$

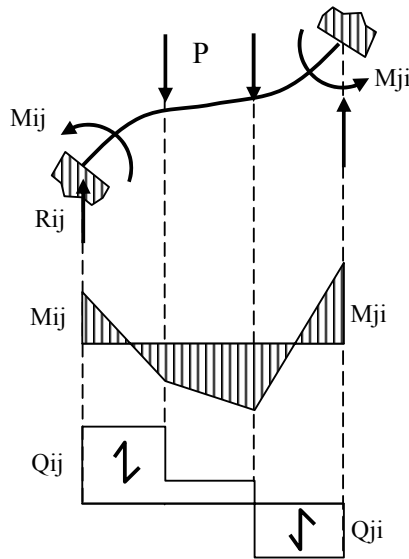
o bien:

$$M_{ij}^* = 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} [2w_i + w_j - 3\psi_{ij}]$$

$$M_{ji}^* = 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} [w_i + 2w_j - 3\psi_{ij}]$$

$$\frac{M_{ij}^* + M_{ji}^*}{l_{ij}} = R_{ij}^* = -R_{ji}^* = Q_{ij}^* = Q_{ji}^* = 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} [w_i + w_j - 2\psi_{ij}]$$

3.4.3- LA BARRA BAJO CARGAS EN EL TRAMO Y DESPLAZAMIENTOS u, v, w



Bajo un estado simultaneo de acciones como las tratadas en 3.4.1 y 3.4.2 por aplicación del principio de superposición, obtendremos las solicitaciones en los extremos:

$$M_{ij} = M_{ij}^o + 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} [2w_i + w_j - 3\psi_{ij}]$$

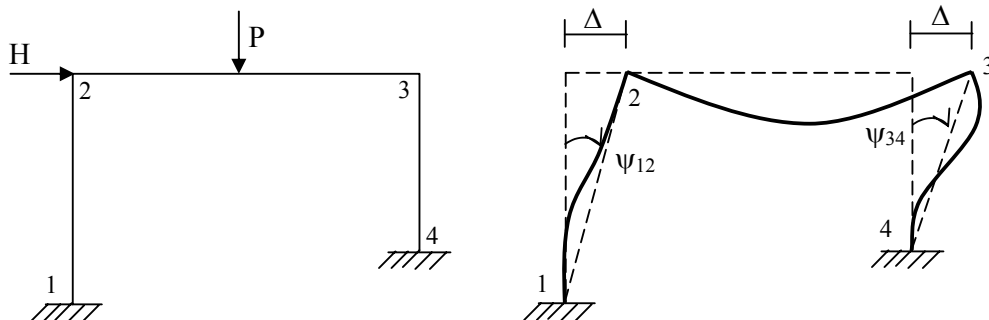
$$M_{ji} = M_{ji}^o + 2 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}} [w_i + 2w_j - 3\psi_{ij}]$$

$$Q_{ij} = Q_{ij}^o + 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} [w_i + w_j - 2\psi_{ij}]$$

$$Q_{ji} = Q_{ji}^o + 6 \frac{EI_{ij}}{l_{ij}^2} [w_i + w_j - 2\psi_{ij}]$$

Expresiones que nos servirán para el planteo de ecuaciones de equilibrio en el desarrollo del Método de las Deformaciones.

3.5- PLANTEO MANUAL DEL MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES



Al igual que lo hicimos con el Método de las Fuerzas, desarrollaremos el presente método sobre un pórtico plano como el de la figura sometido a un estado de cargas P y H. En este tomaremos como incógnitas los desplazamientos y rotaciones existentes, respetando las convenciones de signos ya enunciadas con anterioridad.

Nótese que en este método nuestras incógnitas (desplazamientos) son geométricas, mientras que en el método de las fuerzas las incógnitas eran fuerzas o sollicitaciones.

Existen 4 nudos y tres barras, y por lo tanto podrían a llegar a existir las rotaciones: w_1, w_2, w_3, w_4 y $\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{34}$ de las cuales podemos eliminar:

$$w_1 = 0 \quad (\text{empotramiento})$$

$$w_4 = 0 \quad (\text{empotramiento})$$

$$\psi_{23} = 0 \quad (\text{no existe rotaciones de la barra 2-3 pues los desplazamientos de los nodos 2 y 3 son horizontales}(v = 0) \text{ por la hipótesis indeformabilidad bajo esfuerzos normales de las barras 1-2 y 3-4).}$$

Quedan entonces únicamente las incógnitas:

$$w_2 \quad w_3 \quad \psi_{12} \quad \psi_{34}$$

De la indeformabilidad axial de (2-3) los desplazamientos horizontales de los nudos 2 y 3 son iguales (Δ), por lo cual:

$$\Delta = \psi_{34} \cdot l_{34} = \psi_{12} \cdot l_{12} \quad \psi_{34} = \frac{l_{12}}{l_{34}} \psi_{12} = \eta_{34} \cdot \psi_{12}$$

con lo cual solo quedan 3 incógnitas independientes:

$$w_2 \quad w_3 \quad \psi_{12}$$

Necesitamos entonces 3 ecuaciones para resolver nuestro problema. Por economía de escritura denominaremos con $k_{ij}^o = \frac{EI_{ij}}{l_{ij}}$

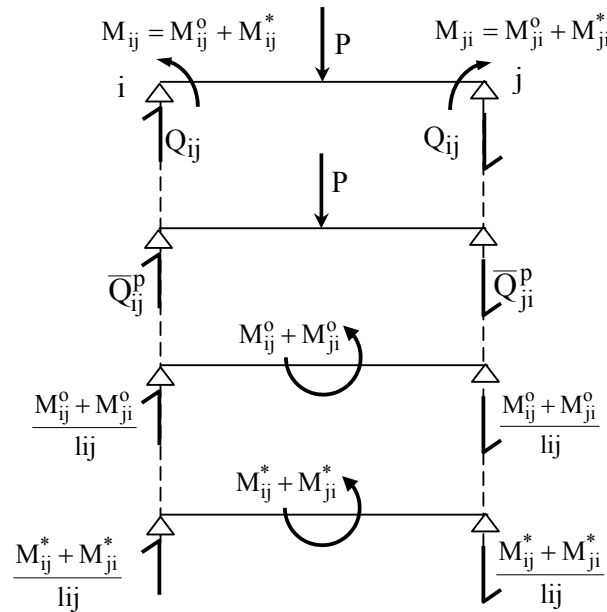
El método consiste en poner las sollicitaciones en función de los desplazamientos (rotaciones incógnitas) y luego plantear las ecuaciones de equilibrio que nos permitan formar un sistema de ecuaciones del cual despejar las incógnitas (w, ψ) y a partir de ellas obtener el valor de las sollicitaciones. Veamos como aplicamos esto último a nuestra estructura.

$$\text{Barra 1-2} \begin{cases} M_{12} = M_{12}^o + 2k_{12}^o [w_2 - 3\psi_{12}] \\ M_{21} = M_{21}^o + 2k_{12}^o [2w_2 - 3\psi_{12}] \end{cases}$$

$$\text{Barra 2-3} \begin{cases} M_{23} = M_{23}^o + 2k_{23}^o [2w_2 + w_3] \\ M_{32} = M_{32}^o + 2k_{23}^o [w_2 + 2w_3] \end{cases}$$

$$\text{Barra 3-4} \begin{cases} M_{34} = M_{34}^o + 2k_{34}^o [2w_3 - 3\eta_{34}\psi_{12}] \\ M_{43} = M_{43}^o + 2k_{34}^o [w_3 - 3\eta_{34}\psi_{12}] \end{cases}$$

Analicemos que pasa con los esfuerzos de corte en la barra ij , en la cual el esfuerzo de corte total según nuestra convención de signos será (con \bar{Q}_{ij}^P ; \bar{Q}_{ji}^P es esfuerzo de corte en los extremos de la barra simplemente apoyada bajo cargas P)



$$Q_{ij} = \bar{Q}_{ij}^P + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}}$$

$$Q_{ji} = \bar{Q}_{ji}^P + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}}$$

$$\begin{array}{|c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} > 0$$

En las barras 1-2 y 3-4

$$Q_{21} = \bar{Q}_{12}^P + \frac{I}{l_{12}} [M_{12}^o + M_{21}^o + 2k_{12}^o(3w_2 - 6\psi_{12})]$$

$$Q_{34} = \bar{Q}_{34}^P + \frac{I}{l_{34}} [M_{34}^o + M_{43}^o + 2k_{34}^o(3w_3 - 6\eta_{34}6\psi_{12})]$$

En nuestro caso particular en las barras 1-2 y 3-4 por no haber cargas en el tramo de las barras \bar{Q}_{21}^P ; \bar{Q}_{34}^P son nulos y por lo tanto, como también son nulos M_{21}^o ; M_{12}^o ; M_{34}^o ; M_{43}^o :

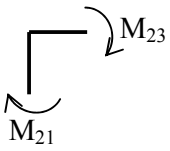
$$Q_{21} = 2 \frac{k_{12}^o}{l_{12}} [3w_2 - 6\psi_{12}]$$

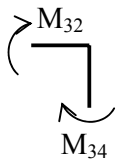
$$Q_{34} = 2 \frac{k_{34}^o}{l_{34}} [3w_3 - 6\eta_{34}\psi_{12}]$$

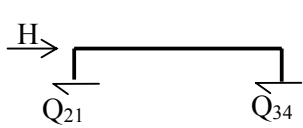
De tablas obtenemos:

$$M_{23}^o = \frac{P \cdot l_{23}}{8} \quad M_{32}^o = -\frac{P \cdot l_{23}}{8}$$

Planteemos ahora las condiciones de equilibrio:

a)  $M_{21} + M_{23} = 0$ (suma de momentos en el nudo 2)
 $2k_{12}^o(2w_2 - 3\psi_{12}) + M_{23}^o + 2k_{23}^o(2w_2 + w_3) = 0$

b)  $M_{32} + M_{34} = 0$ (suma de momentos en el nudo 3)
 $M_{32}^o + 2k_{23}^o(2w_2 + w_3) + 2k_{34}^o(2w_3 - 3\eta_{34} \cdot 3\psi_{12}) = 0$

c)  $H - Q_{21} - Q_{34} = 0$ (suma de las fuerzas horizontales)
 $H - 2\frac{k_{12}^o}{l_{12}}(2w_3 - 6\psi_{12}) - 2\frac{k_{34}^o}{l_{34}}(3w_3 - 6\eta_{34} \cdot \psi_{12}) = 0$

De a) b) y c) obtengo entonces 3 ecuaciones con 3 incógnitas w_1 , w_2 , y ψ_{12}

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } (4k_{12}^o + 4k_{23}^o)w_2 + 2k_{23}^o w_3 - 6k_{12}^o \psi_{12} + M_{23}^o &= 0 \\ \text{b) } 2k_{23}^o w_2 + (4k_{23}^o + 4k_{34}^o)w_3 - 6k_{34}^o \eta_{34} \psi_{12} + M_{32}^o &= 0 \\ \text{c) } -6\frac{k_{12}^o}{l_{12}} w_2 - 6\frac{k_{34}^o}{l_{34}} w_3 + \left(12\frac{k_{12}^o}{l_{12}} + 12\frac{k_{34}^o}{l_{34}} \eta_{34}\right) \psi_{12} + H &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De este sistema podré calcular w_1 w_2 ψ_{12} que aplicadas a las ecuaciones que nos dan los M_{ij} en los extremos de las barras nos permiten obtener:

$$M_{12} \quad M_{21} \quad M_{23} \quad M_{32} \quad M_{34} \quad M_{43}$$

y con estos los diagramas de solicitaciones M, Q y N, objetivo del método analizado.

Es conveniente explicitar que siempre mediante cortes apropiados podemos analizar equilibrio de nudos y otros sectores de la estructura de forma tal de poder plantear un sistema normal de ecuaciones lineales que nos permita el cálculo de la totalidad de las incógnitas (geométricas).

Más adelante volveremos sobre el tema para un planteo mas general y sistemático con la utilización de matrices con el objeto de su procesamiento por computadoras.