2

MÉTODO DE LAS FUERZAS

2.1- ANALISIS ESTRUCTURAL: CONSIDERACIONES GENERALES

Aún a riesgo de incurrir en algunas reiteraciones creemos conveniente referirnos a algunos conceptos generales.

En el diseño de estructuras se tendrán en cuenta diversos factores que el proyectista deberá armonizar de manera tal de optimizar el diseño para cumplir con premisas de funcionalidad, seguridad, economía y belleza de diseño entre otras condiciones.

Factores a considerar para ello

a) Elección del tipo de estructura que satisfaga las condiciones requeridas en el proyecto de la obra.

b) Evaluación de las cargas y acciones a que se la someterá.

c) Cálculo de las solicitaciones externas e internas.

d) Dimensionamiento de los distintos elementos que componen la estructura.

e) Verificación de las deformaciones.

f) Evaluación del diseño elegido a fin de aceptarlo, corregirlo o cambiarlo.

g) Análisis de costos para la ejecución y para el mantenimiento.

2.1.1- ELECCION DEL TIPO DE DISEÑO

Tema fundamental que esta condicionado por una gran variedad de factores entre los cuales mencionamos:

Forma de la estructura con distintas alternativas como pueden ser:

- Isostáticas o hiperestáticas;
- Laminares o de barras;
- Tridimensionales o planas;
- Reticuladas o de alma llena;
- De hormigón, acero, maderas, o mixtas;
- Fabricadas in situ o prefabricadas, etc.

2.1.2- EVALUACION DE LAS CARGAS Y ACCIONES EXTERNAS

En general dependen del uso a que esta destinada la estructura y las podemos intentar clasificar como:

- ***Cargas Permanentes,*** como pueden ser: su peso propio, acciones de elementos de la construcción (paredes, pisos,empujes de suelos ,presiones hidráulicas).

- ***Cargas Variables,*** como por ejemplo cargas debidas al uso (muebles elementos a almacenar, publico en un cine), cargas de viento, cargas de tránsito en un puente o una rampa; cargas dinámicas, como maquinarias, variaciones de temperatura, etc.

- ***Cargas accidentales,*** que tienen poca posibilidad de producirse como terremotos o tornados en algunas zonas, accidentes en una planta atómica, etc., y que deben ser consideradas o no en forma muy especial.

En general las cargas a aplicar están especificadas en los reglamentos, a los cuales hay que agregarle un análisis producto de la experiencia.

2.1.3- CALCULO DE SOLICITACIONES INTERNAS Y EXTERNAS

Esto implica el cálculo de Momentos Flectores, Esfuerzos de Corte y Normales, Momentos Torsores y Reacciones, y se denomina Análisis de Estructuras, que es el objetivo del curso para Estructuras Hiperestáticas.

2.1.4- DIMENSIONAMIENTO

Con el conocimiento de los esfuerzos en los elementos componentes es posible su dimensionamiento sobre la base de las solicitaciones y el tipo de material a utilizar. Las dimensiones encontradas deben ser comparadas con las previstas en el predimensionamiento.

2.1.5- VERIFICACION DE LAS DEFORMACIONES

Los reglamentos dan normas sobre las rigideces que deben tener los elementos estructurales a efecto de que no produzcan deformaciones excesivas, y en algunos casos, dichas deformaciones deben ser calculadas y comparadas con las especificadas.

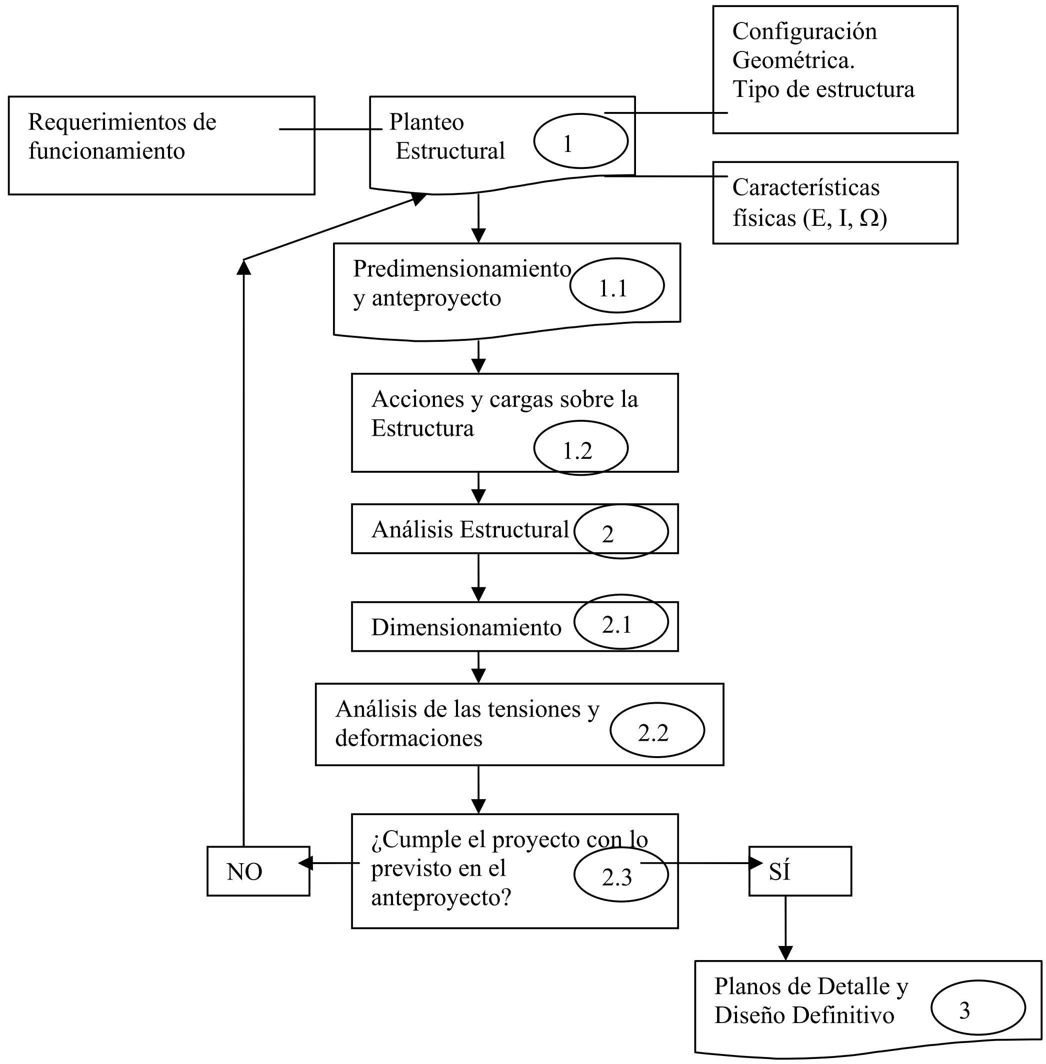
2.1.6- EVALUACION DEL DISEÑO

Terminado el diseño y sus dimensiones, el mismo debe ser sometido a un análisis critico con el fin de aceptarlo o introducirle modificaciones, ya sea en su morfología como en su dimensionamiento, con el fin de optimizarlo tanto en su parte funcional como económica y constructiva. Se podría llegar al caso extremo de que el diseño propuesto fuera irracional y deba elegirse uno mas acorde con los requerimientos.

2.1.7- SINTESIS DEL PROCESO DE DISEÑO ESTRUCTURAL

Resumiendo podemos decir que para el diseño de una estructura debemos pasar por las siguientes etapas:

1-El planteo estructural,
2-el análisis y
3-el diseño final con sus detalles de construcción.



Nada mejor que una gráfica para entender las interrelaciones que existen:

Como ya hemos expresado el objeto del curso es el Análisis Estructural, para lo cual daremos las herramientas que proveen alguno de los distintos Métodos de cálculo en vigencia.

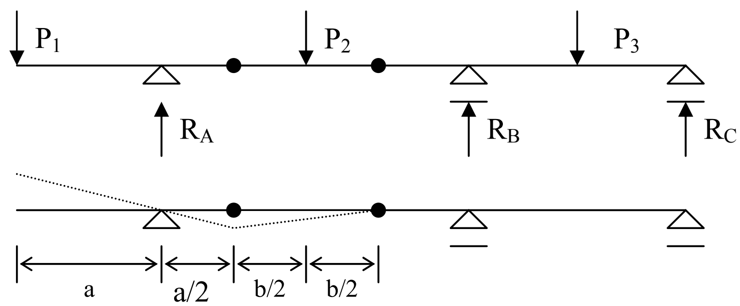
Aclararemos que si en el planteo estructural la estructura elegida es isostática es muy difícil que deba cambiarse el anteproyecto inicial 1.1 en la etapa 2.3.

2.1.8- ESTABILIDAD. INDETERMINACION ESTATICA Y GEOMETRICA

Veamos en forma sintética algunos conceptos muy simples a aplicar en las estructuras, referidas mas que a su resistencia, a su forma y vinculaciones internas y externas.

Haremos entonces una primera clasificación en:

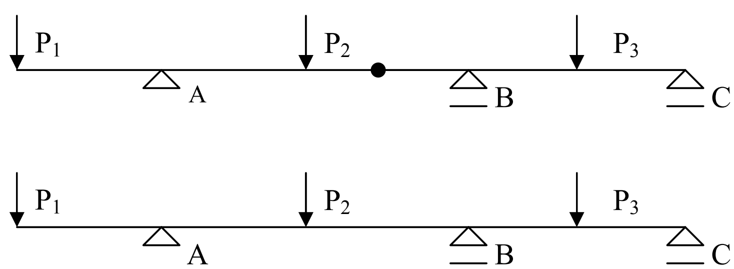
a) **<u>Estructuras inestables</u>:** Son aquellas que no están diseñadas para soportar cualquier sistema de cargas y que solo pueden estar en equilibrio bajo cierto estado de cargas exteriores. Constituyen Cadenas Cinemáticas o Mecanismos, y a fin de dar ejemplos, si bien los conceptos son generales, nos referimos al caso de las vigas.



Es evidente que la estructura es un mecanismo con un grado de libertad que solo estará en equilibrio para una relación de cargas P_1 y P_2, que dependerá de las longitudes y su punto de aplicación.

Es inmediato que solo existirá equilibrio si se cumple que $P_1 = \frac{P_2}{4}$, mientras que cualquiera sea P_3 no se desequilibrará el sistema.

b) **<u>Estructuras estables</u>:** son aquellas que están diseñadas para soportar cualquier sistema de cargas sin perder su estabilidad, dependiendo de las fuerzas aplicadas las reacciones que aparecerán para equilibrar la estructura



El primer caso es similar al caso a) al cual le hemos eliminado una articulación convirtiendo a la estructura en isostática y la podemos calcular con la aplicación de las condiciones de equilibrio que nos proveerán las ecuaciones necesarias para el calculo de las 3 reacciones.

En el segundo caso hemos eliminado la otra articulación modificando el sistema y convirtiendo a la estructura en un hiperestático de Primer Orden o Grado, ya que tiene un vínculo sobreabundante o no estrictamente necesario para la estabilidad del sistema. Para calcular este caso necesitamos aplicar, además de las Condiciones de Equilibrio, Condiciones de Deformación.

Del camino que elijamos para resolver el conjunto de ecuaciones que nos proveen las Condiciones de Equilibrio y la Compatibilidad de las Deformaciones surgirán los dos principales Métodos que daremos en el curso:

El Método de las Fuerzas, cuyas incógnitas son estáticas (fuerzas) y *El Método de las Deformaciones* cuyas incógnitas son geométricas (traslaciones y rotaciones).

2.2- EL MÉTODO DE LAS FUERZAS

También denominado de la Flexibilidad, por los coeficientes que aparecen en el proceso de cálculo.

Recordemos que en las estructuras hiperestáticas debemos recurrir no sólo a las Condiciones de Equilibrio sino también a las Condiciones (ecuaciones) Suplementarias de Deformación.

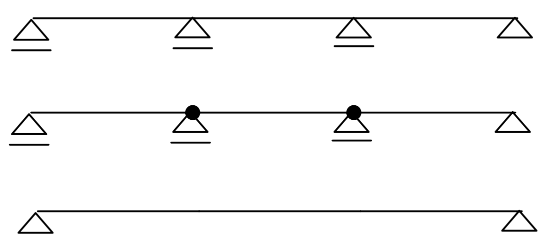
Aquí aparece la necesidad del anteproyecto y predimensionamiento, ya que las deformaciones dependerán de las cargas, pero también de las secciones adoptadas para los elementos constitutivos (vigas, columnas, etc.). Más precisamente las solicitaciones dependerán de las cargas y de las relaciones de rigideces de los distintos elementos.

Podemos referirnos como "vínculos hiperestáticos o sobreabundantes" a aquellos vínculos externos o internos que podrían ser eliminados sin que el sistema se convierta en inestable.

El número o cantidad de vínculos que se deben eliminar para que el sistema "hiperestático" se convierta en isostático se denomina "Grado de Hiperestaticidad". Para una estructura dada el grado de hiperestaticidad es único y perfectamente definido, sin embargo existe la posibilidad de elegir varias alternativas de conjuntos de vínculos que al eliminarse hacen isostática a la estructura, con la salvedad que en cada conjunto el número de vínculos es siempre el mismo.

A modo de ejemplo veamos tres casos típicos:

a) Vigas

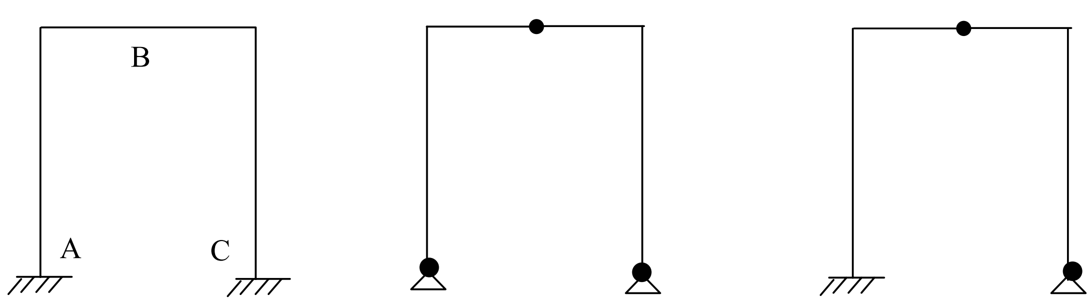


Grado de hiperestaticidad = 2

Se elimina la continuidad en los apoyos mediante 2 articulaciones, quedando 3 vigas simplemente apoyadas.

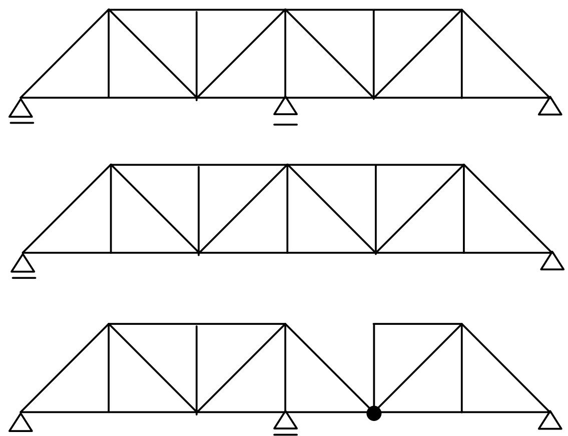
En el segundo caso se eliminan dos apoyos intermedios quedando una viga simplemente apoyada.

b) Pórticos



El pórtico empotrado-empotrado es un hiperestático de tercer grado que lo puedo convertir en isostático en un caso introduciendo tres articulaciones en A, B, y C, que eliminan los vínculos que resisten momentos (2 externos y uno interno). También podemos llegar al isostático con una articulación en B (elimina momento flector), otra articulación en C(elimina reacción de momento) y la eliminación de la reacción horizontal en C convirtiendo el apoyo en móvil.

c) Reticulados



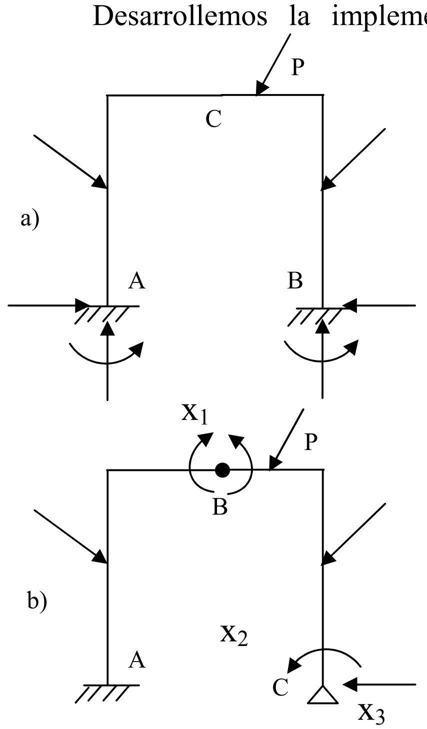
El número de vínculos a eliminar o grado es uno.

Puedo en este caso eliminar un apoyo (vínculo externo) o una barra (vínculo interno). Señalaremos que en estos tres casos es posible elegir otros conjuntos de vínculos a eliminar que me producirán otros sistemas isostáticos asociados.

Al isostático asociado por la eliminación de vínculos al sistema hiperestático lo denominamos "isostático fundamental". Su elección depende del calculista, y puede tener importancia en la simplicidad del cálculo pero no en los resultados finales del mismo.

2.2.1- ESTRUCTURAS DE ALMA LLENA

Desarrollemos la implementación del Método de las Fuerzas sobre un pórtico empotrado-empotrado como el de la figura, cuyo grado de hiperestaticidad es 3, por lo cual debemos eliminar 3 vínculos.



El primer paso es elegir el "isostático fundamental" (fig. b).

En el mismo hemos introducido una articulación en C y al apoyo B que era de 3^er grado (empotramiento) lo hemos convertido a uno de 1^er grado (apoyo móvil) eliminando dos vínculos.

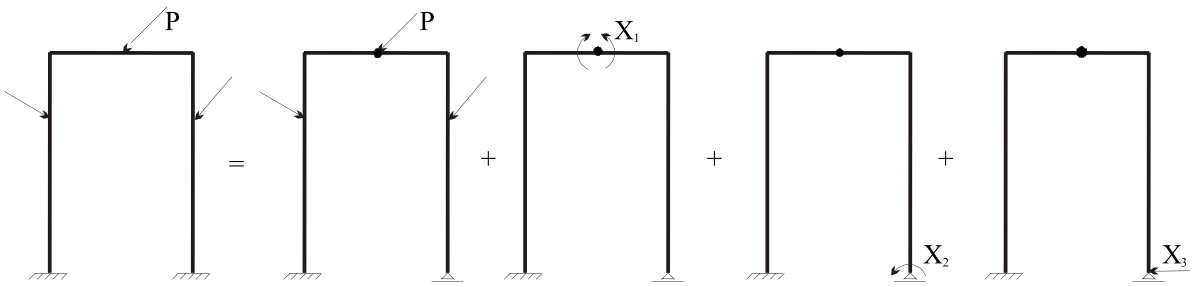
Al cargar el sistema de la figura a) con las cargas P se producirá un estado de solicitaciones y un estado de deformaciones en el sistema hiperestático, cuyo cálculo es el objetivo de nuestro estudio.

En caso de aplicar el mismo estado de cargas P al "isostático fundamental" de la figura b) se asociará un estado de solicitación y de deformación, también en equilibrio (como en el caso a) pero distinto al verdadero.

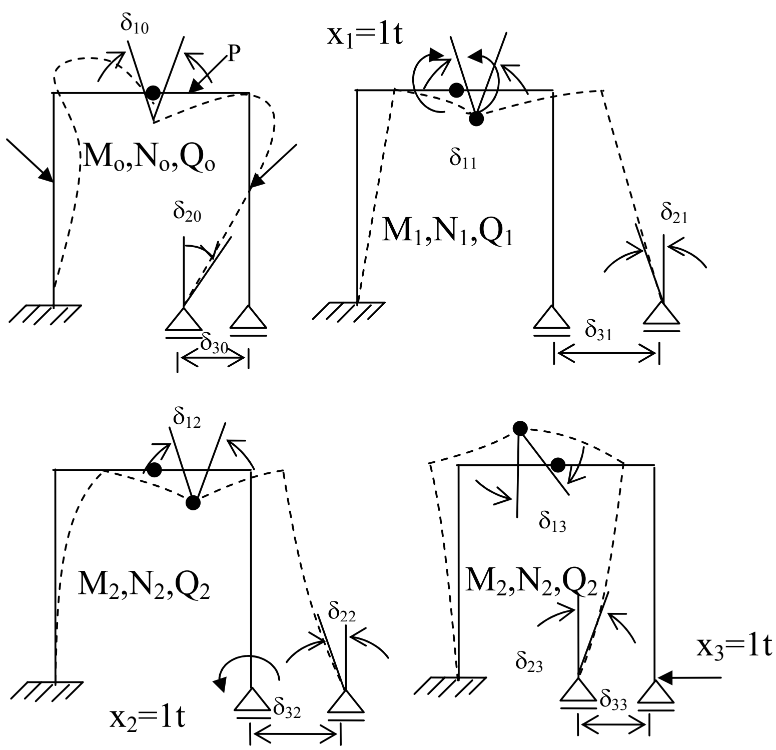
Para que en ambos casos el estado sea idéntico deberá agregar como cargas externas las solicitaciones que resistían los vínculos eliminados. A estas cargas externas momento flector en

C, momento en B y reacción horizontal en B las denomino X_1, X_2 y X_3 y constituyen nuestras "incógnitas hiperestáticas", cuyo número es igual al "grado de Hiperestaticidad".

El problema ahora se reduce a resolver la estructura isostática fundamental bajo la superposición del estado de cargas exteriores P y el verdadero valor de las incógnitas hiperestáticas X_1, X_2 y X_3 que será totalmente equivalente al hiperestático bajo cargas P.



Estudiemos ahora las deformaciones del isostático para los distintos estados de cargas para después superponer efectos.



Carguemos primero con las cargas P y se producirá un estado de solicitaciones M_0 N_0 Q_0 y un estado de deformación del cual me interesan los 3 corrimientos correspondientes con X_1, X_2 y X_3 que denominaremos:

δ_{10} (rotación relativa en la articulación)
δ_{20} (rotación en el apoyo B)
δ_{30} (corrimiento horizontal en B)

Como no conocemos el verdadero valor de X_1 cargamos con un valor unitario X_1 = 1tm, que nos produce solicitaciones M_1 N_1 Q_1 y corrimientos correspondientes δ_{11} δ_{21} δ_{31}.

Idéntico significado tienen para la carga:

	X_2 = 1tm	M_2 N_2 Q_2	y	δ_{12} δ_{22} δ_{32}
y para	X_3 = 1t	M_3 N_3 Q_3	y	δ_{13} δ_{23} δ_{33}.

En general designamos como δij al corrimiento correspondiente con Xi (incógnita) debido a una carga Xj = 1, reservando el subíndice j = 0 para las cargas exteriores P.

Si ahora aplicamos el Principio de Superposición para las cargas P y los verdaderos valores de Xi (X_1 X_2 X_3), las deformaciones totales serán:

Rotación Relativa 1 $\quad \delta_1 = \delta_{10} + x_1\delta_{11} + x_2\delta_{12} + x_3\delta_{13} = 0$

Rotación 2 $\quad \delta_2 = \delta_{20} + x_1\delta_{21} + x_2\delta_{22} + x_3\delta_{23} = 0$

Desplazamiento 3 $\quad \delta_3 = \delta_{30} + x_1\delta_{31} + x_2\delta_{32} + x_3\delta_{33} = 0$

Es inmediato que las deformaciones δ_1 δ_2 δ_3 totales son nulas, pues así lo son en el hiperestático original por condiciones de vínculos, ya sean estos externos o internos.

Hemos así planteado un sistema de ecuaciones basadas en condiciones de deformación con el mismo número de incógnitas Xi que de ecuaciones, con lo cual es posible calcular las incógnitas hiperestáticas X_1 X_2 X_3.

Las solicitaciones finales serán:

$$M = M_0 + X_1M_1 + X_2M_2 + X_3M_3$$
$$N = N_0 + X_1N_1 + X_2N_2 + X_3N_3$$
$$Q = Q_0 + X_1Q_1 + X_2Q_2 + X_3Q_3$$
$$R = R_0 + X_1R_1 + X_2R_2 + X_3R_3$$

De acuerdo con lo ya visto al tratar el cálculo por medio del Principio de los Trabajos Virtuales o por el Teorema de Castigliano, el cálculo de los Coeficientes de Flexibilidad se realiza por la expresión:

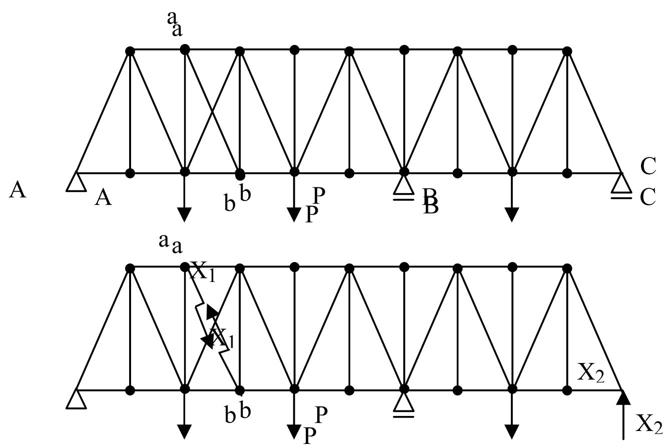
$$1 \cdot \delta ij = \int_0^l \frac{MiMj}{EI}\,ds + \int_0^l \frac{NiNj}{E\Omega}\,ds + \int_0^l \frac{\chi QiQj}{G\Omega}\,ds$$

dóonde en estructuras de Alma llena se suelen despreciar los dos últimos términos respecto del primero, lo que equivale a despreciar las deformaciones debidas a esfuerzos Normales y de Corte y considerar solo las debidas a Momentos.

Esto ultimo equivale a la hipótesis de rigidez axial considerando las rigideces EΩ y también GΩ de valores infinitos.

2.2.2- ESTRUCTURAS RETICULADAS

Siguiendo la misma metodología anterior, tratemos el caso de la figura con un grado de hiperestaticidad igual a dos y analicemos el sistema original y el isostático fundamental al cual le hemos cortado la barra ab, en cuyo lugar aplicamos la incógnita X_1 y la incógnita X_2 que reemplaza al apoyo móvil C eliminado.



Para el sistema de cargas P una barra i tendrá una solicitación Sio (esfuerzo normal).

Si cargo con $X_1 = 1t$ tendremos solicitaciones Si_1 y para $X_2 = 1t$ las solicitaciones valdrán Si_2

Llamando ahora:

$$\delta ij = \sum_{i=1}^{n} \frac{SijSik}{E\Omega i} li \qquad \text{donde} \qquad n = \text{N° de barras}$$

$j = 1, 2$
$k = 0, 1, 2$

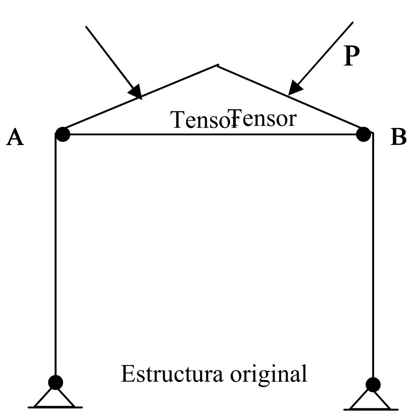
Podemos plantear que los corrimientos correspondientes con X_1 y X_2 se deben anular.

$$\delta_1 = \delta_{10} + x_1\delta_{11} + x_2\delta_{12} = 0$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + x_1\delta_{21} + x_2\delta_{22} = 0$$

sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas que nos permiten obtener X_1 y X_2 y con ellas los esfuerzos normales en las barras

$$Si = Si_0 + x_1 Si_1 + x_2 Si_2$$

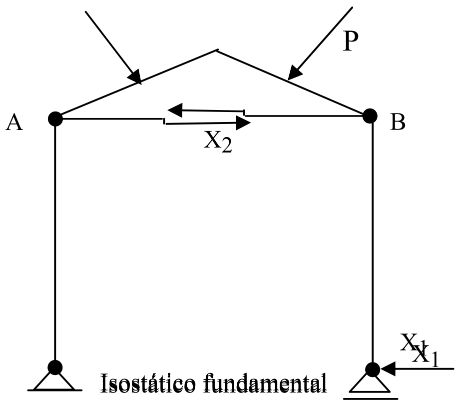
2.2.3- PORTICO ATIRANTADO (Estructura mixta)



Tiene importancia didáctica por el análisis de las deformaciones que deben realizarse según sea la forma en que se desean aplicar las incógnitas.

Supongamos un pórtico de Hormigón Armado que tiene un tensor de acero y está sustentado sobre dos apoyos fijos, con un estado de cargas P.

El grado de hiperestaticidad es 2 y designamos con Ee, Eb, Ωe, Ib a los módulos de elasticidad del acero, del hormigón, la sección del tensor y los momentos de inercia de las barras de hormigón respectivamente.



El tensor de longitud le tiene únicamente esfuerzos normales y en el pórtico de hormigón consideramos únicamente las deformaciones debidas a momentos.

Elegimos el isostático fundamental haciendo móvil el apoyo en el cual aplicamos la incógnita X_1, y cortando el tensor tomando como incógnita la solicitación normal X_2.

Tendremos entonces para cada estado los siguientes momentos en el pórtico y esfuerzos normales en el tensor:

Para cargas P:	M_0 (pórtico)	$Ne_0 = 0$ (tensor)
$X_1 = 1t$	M_1	$Ne_1 = 0$
$X_2 = 1t$	M_2	$Ne_2 = 1$

Siendo Entonces

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{Eb \cdot Ib} \cdot ds \qquad \delta_{20} = \int \frac{M_0 \cdot M_2}{Eb \cdot Ib} \cdot ds \qquad \delta_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{Eb \cdot Ib} \cdot ds$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 \cdot M_2}{Eb \cdot Ib} \cdot ds$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2 \cdot M_2}{Eb \cdot Ib} \cdot ds + \int \frac{Ne_2 \cdot Ne_2}{Ee \cdot \Omega e} \cdot ds = \int \frac{M_2 \cdot M_2}{Eb \cdot Ib} \cdot ds + \frac{1}{Ee \cdot \Omega e} \cdot le$$

y aplicando condiciones de deformación:

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0$$
$$\delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0$$

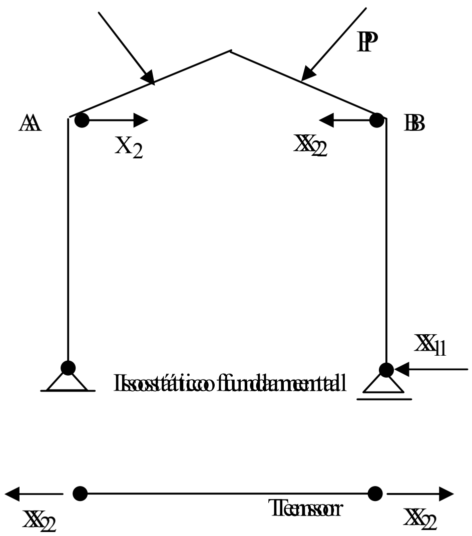
dónde obtendremos X_1 y X_2

Analicemos ahora el mismo problema, pero en lugar de cortar el tensor, separémoslo completo para hallar el isostático fundamental, siendo nuestras incógnitas X_1 (reacción horizontal) y X_2 (acción del tensor sobre el pórtico, y sus contrarias acciones del pórtico sobre el tensor).

Los diagramas de momentos para las cargas P, $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ coincidirán con el caso anterior y serán M_0, M_1 y M_2.

Para el pórtico tendremos:

$$\delta^*_{10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{Eb \cdot Ib} \cdot ds$$
$$\delta^*_{20} = \int \frac{M_0 \cdot M_2}{Eb \cdot Ib} \cdot ds$$



$$\delta^*_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{Eb \cdot Ib} \cdot ds$$

$$\delta^*_{12} = \delta^*_{21} = \int \frac{M_1 \cdot M_2}{Eb \cdot Ib} \cdot ds$$

$$\delta^*_{22} = \int \frac{M_2 \cdot M_2}{Eb \cdot Ib} \cdot ds$$

Planteando las condiciones de deformación:

Corrimiento en el apoyo móvil $\delta^*_1 = \delta^*_{10} + X_1\delta^*_{11} + X_2\delta^*_{12} = 0$

Corrimiento relativo de A; B $\delta^*_2 = \delta^*_{20} + X_1\delta^*_{21} + X_2\delta^*_{22} = \delta^*_{AB}$

Analicemos $\delta^*_2 = \delta^*_{AB}$ en el pórtico y el alargamiento del tensor δt.

$$\delta t = \delta e \cdot le = \frac{\sigma e}{Ee} le = \frac{Ne}{Ee \cdot \Omega e} le = X_2 \frac{le}{Ee \cdot \Omega e}$$

positivo en el caso de la figura con $X_2>0$, produciéndose un alargamiento del tensor.

Para esta misma suposición de tracción en el tensor al analizar en el pórtico el signo de δ_{AB} veremos que el corrimiento relativo correspondiente con X_2 es negativo, pero el mismo valor que del δt.

$$\delta^*_{AB} = -\delta t = -X_2 \frac{le}{Ee \cdot \Omega e}$$

y por lo tanto:

$$\delta^*_1 = \delta^*_{10} + X_1\delta^*_{11} + X_2\delta^*_{12} = 0$$

$$\delta^*_2 - \delta^*_{AB} = \delta^*_{20} + X_1\delta^*_{21} + X_2\left(\delta^*_{22} + \frac{le}{Ee \cdot \Omega e}\right) = 0$$

Sistema de ecuaciones idéntico al encontrado en el análisis anterior con el tensor cortado.

La variedad de estructuras hace que pudiéramos plantear otros ejemplos interesantes pero sólo diremos que el esquema de razonamiento es en todos los casos similar y sólo aparecerían variantes en la forma de calcular los coeficientes δij y de plantear las condiciones de compatibilidad de deformaciones.

Resumiendo, el método de las fuerzas consiste en:

1) Elección del isostático fundamental eliminando un número de vínculos igual al grado de hiperestaticidad y quedando definidas las incógnitas X_1 X_2 X_3......Xn.

2) Cálculo en el isostático de los diagramas de solicitaciones para cargas exteriores (M_0 N_0 Q_o).

3) Cálculo en el isostático de los diagramas de solicitaciones para cada para cada una de las n Xi = 1 (Mi Ni Qi).

4) Cálculo de los coeficientes $\delta i_0 = \int \frac{Mi \cdot M_0}{E \cdot I} \cdot ds$ ....

5) Cálculo de los coeficientes $\delta ij = \int \frac{Mi \cdot Mj}{E \cdot I} \cdot ds$ ....

6) Planteo de las condiciones de deformación que dan un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que resuelto nos da como solución Xi.

7) Obtención de los diagramas de solicitaciones por superposición de efectos.

El planteo matemático se puede resumir.

1) Definición del vector incógnita $\overline{X} = (Xi) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ Xn \end{bmatrix}_{1 \times n}$

2) Cálculo del vector carga $\vec{\delta}o = (\delta io) = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{bmatrix}_{1 \times n}$

3) Cálculo de la matriz de los Coeficientes (de flexibilidad)

$$[\delta] = (\delta ij) = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \ldots \delta_1 n \\ \delta_{21} & \delta_{22} \ldots \delta_2 n \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \delta n_1 & \delta n_2 \ldots \delta nn \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Matriz simétrica (ya que δij = δji) respecto de la diagonal principal donde se cumplen, además, que todos los δii son positivos.

4) Planteo del sistema de ecuaciones:

$$\vec{\delta}_0 + [\delta] \times \vec{X} = 0$$

5) Resolución del sistema

$$\vec{X} = -[\delta]^{-1} \times \vec{\delta}_0$$

6) Diagrama de solicitaciones (S)

$$S = S_0 + \sum_{i=1}^{n} Si \times Xi$$

2.3- MATRIZ β = INVERSION DE LAMATRIZ DE LOS COEFICIENTES

Para el caso de tener que resolver una estructura varias veces por existir numerosos estados de carga, y poder dimensionar luego cada elemento con la superposición de los estados que den las solicitaciones más desfavorables, es útil un planteamiento del problema mediante la aplicación de la Matriz β.

Particularmente es apto para la solución de Líneas de Influencia en sistemas hiperestáticos.

Damos por conocido el cálculo de la inversa de una matriz cuadrada.

Sea la Matriz de los coeficientes (simétrica)

$$[\delta] = (\delta ij) = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \ldots \delta_1 n \\ \delta_{21} & \delta_{22} \ldots \delta_2 n \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \delta n_1 & \delta n_2 \ldots \delta nn \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad \delta ij = \delta ji$$

y la matriz inversa $[\delta]^{-1}$ tal que $[\delta ij]^{-1} = \dfrac{[\mathrm{adj}\delta ij]^t}{|\delta ij|}$

$$[\delta]^{-1}[\delta] = [\delta][\delta ij]^{-1} = I = \text{Matriz unidad}$$

Por simetría tanto $[\delta]$ como $[\delta]^{-1}$ serán iguales a sus traspuestas:

$$[\delta]^t = [\delta] \qquad\qquad \left([\delta]^{-1}\right)^t = [\delta]^{-1}$$

Vimos en el final del tema anterior:

$$\vec{x} = -[\delta]^{-1} \times \vec{\delta}_0 = \left[-\frac{adj\,\delta ij}{|\delta ij|} \right]^t \times \vec{\delta}_0$$

y denominando con el nombre de Matriz β a:

$$[\beta]=[\beta ij]=[-\delta]^{-1}=\frac{(-\operatorname{adj}\delta ij)^{t}}{|\delta ij|}=\frac{(-\operatorname{adj}\delta ij)}{|\delta ij|}$$

que también es simétrica $\beta ij=\beta ji$

será:

$$\bar{x}=(\bar{x}_i)=-[\beta ij]\times\vec{\delta}j_0=[\beta ji]\times\vec{\delta}j_0$$

$$\text{con}\quad [\beta]=[\beta ij]=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\ldots\beta_{1}n\\ \beta_{21} & \beta_{22}\ldots\beta_{2}n\\ \vdots & \vdots\quad\vdots\\ \beta n_{1} & \beta n_{2}\ldots\beta nn\end{bmatrix}$$

que desarrollada queda:

$$X_1=\beta_{11}\delta_{10}+\beta_{12}\delta_{20}+\ldots+\beta_{1n}\delta_{no}$$
$$X_1=\beta_{21}\delta_{10}+\beta_{22}\delta_{20}+\ldots+\beta_{2n}\delta_{no}$$
$$\vdots$$
$$X_n=\beta_{n1}\delta_{10}+\beta_{n2}\delta_{20}+\ldots+\beta_{nn}\delta_{no}$$

o en forma resumida

$$X_i=\beta_{i1}\delta_{10}+\beta_{i2}\delta_{20}+\ldots+\beta_{in}\delta_{no}=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\delta_{j0}$$

Expresión que nos da el valor de la incógnita como una suma de productos de coeficientes βij que no dependen del estado de cargas sino solo de los δij, multiplicados por términos de cargas δjo.

Calculados los βij para cada estado de cargas sólo necesitaré calcular los δjo y aplicar la expresión:

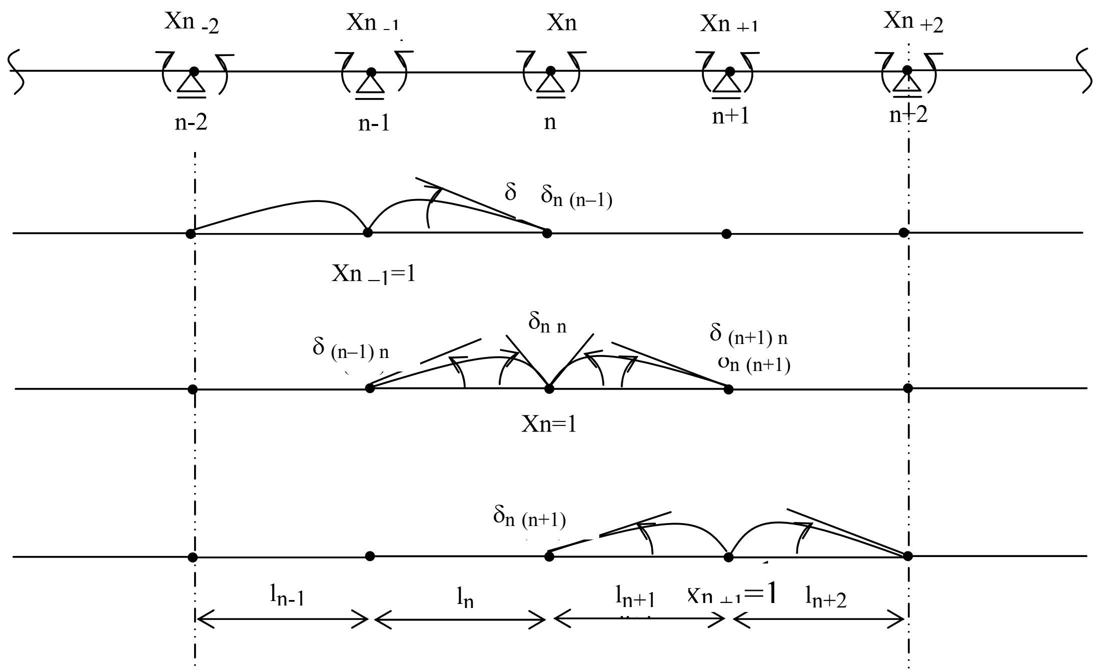
$$X_i=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\delta_{j0}$$

para hall ar las incógnitas hiperestáticas Xi.

2.4- ECUACION DE LOS 5 MOMENTOS Y DE LOS 3 MOMENTOS

Plantearemos la resolución de una viga continua sustentada en apoyos elásticos aplicando el Método de las Fuerzas.

Como es inmediato, dichos apoyos que representaremos por resortes, podrán descender y comenzaremos el estudio sobre el apoyo intermedio n de una viga de apoyos fijos. El grado m de hiperestaticidad es igual al número de apoyos intermedios de una viga de (m + 1) tramos.



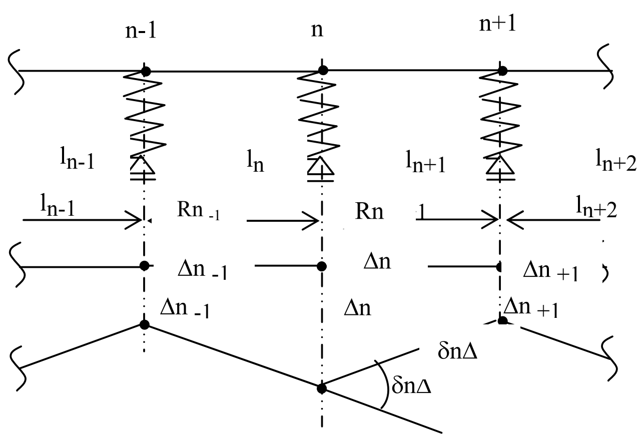
Elegimos el fundamental aplicando articulaciones en los apoyos intermedios resultando los momentos flectores en dichos apoyos las incógnitas hiperestáticas Xn. En la figura se identifican los distintos δij para alguna de las incógnitas Xi = 1.

La ecuación de compatibilidad de deformación en el apoyo genérico n es :

$$\delta_{n(n-1)} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n(n+1)} X_{n+1} + \delta_{no} = 0$$

donde δno es el corrimiento correspondiente con Xn (rotación relativa) debido a efectos por cargas (δnp), efectos de temperatura (δnt); o descensos de apoyo (δnΔ).No tomaremos en cuenta en este estudio el efecto de temperatura.

Si tampoco existieran descensos en el apoyo, la ultima ecuación en la cual intervienen solo el momento en el apoyo n y en sus dos adyacentes (n-1) y (n+1) no es mas que la "Ecuación de tres Momentos" utilizada para la resolución de vigas continuas.



Supongamos ahora descensos en los apoyos …Δ_{n-2}, Δ_{n-1}, Δ_n, Δ_{n+1}, Δ_{n+2}, …. Será:

$$\text{(1)} \qquad \delta_{n\Delta} = \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{l_{n+1}}$$

Se han considerado como positivos los Δn para abajo.

Si definimos la flexibilidad del resorte mediante un coeficiente de resorte αn cuyo valor es el desplazamiento que sufrirá para una carga unitaria. Se cumplirá:

(3) $\Delta n = \alpha n \times Rn$ donde Rn es la reacción en el apoyo n

En el caso de una viga de fundación apoyada sobre un lecho elástico los coeficientes αn dependerán, entre otras causas, de las características del suelo.

Denominando con Rn^0 la reacción debida a cargas exteriores en el isostático fundamental, la reacción total en los apoyos n será:

$$(3) \quad R_n = R_n^0 + \frac{X_n - X_{n-1}}{l_n} + \frac{X_n - X_{n+1}}{l_{n+1}}$$

$$(4) \quad \Delta_n = \alpha_n \left[R_n^0 + \frac{X_n - X_{n-1}}{l_n} + \frac{X_n - X_{n+1}}{l_{n+1}} \right]$$

y análogamente

$$(5) \quad \Delta_{n-1} = \alpha_{n-1} \left[R_{n-1}^0 + \frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{l_{n-1}} + \frac{X_{n-1} - X_n}{l_n} \right]$$

$$(6) \quad \Delta_{n+1} = \alpha_{n+1} \left[R_{n+1}^0 + \frac{X_{n+1} - X_n}{l_{n+1}} + \frac{X_{n+1} - X_{n+2}}{l_{n+2}} \right]$$

Remplazando en (1) los valores de (4); (5) y (6), distribuyendo y agrupando términos se llega a la expresión:

$$\begin{aligned}
\delta_{n\Delta} = & \left(\frac{\alpha_n R_n^0 - \alpha_{n-1} R_{n-1}^0}{l_n} + \frac{\alpha_n R_n^0 - \alpha_{n+1} R_{n+1}^0}{l_{n+1}} \right) + X_{n-2} \left(\frac{\alpha_{n-1}}{l_n \cdot l_{n-1}} \right) \\
(7) \quad & - X_{n-1} \left(\frac{\alpha_n}{l_n^2} + \frac{\alpha_{n-1}}{l_{n\cdot} \cdot l_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}}{l_n^2} + \frac{\alpha_n}{l_{n-1} \cdot l_n} \right) + X_n \left(\frac{\alpha_n}{l_n^2} + \frac{2\alpha_n}{l_{n\cdot} \cdot l_{n+1}} + \frac{\alpha_{n-1}}{l_n^2} + \frac{\alpha_n}{l_{n+1}^2} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}^2} \right) \\
& - X_{n+1} \left(\frac{\alpha_n}{l_{n+1} \cdot l_n} + \frac{\alpha_n}{l_{n+1}^2} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}^2} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1} \cdot l_{n+2}} \right) + X_{n+2} \left(\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1} \cdot l_{n+2}} \right)
\end{aligned}$$

donde $\delta n\Delta$ es el termino correspondiente el descenso del apoyo y será:

$$\delta_{n0} = \delta_{np} + \delta_{n\Delta}$$

y por lo tanto:

$$\delta_{n(n-1)} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n(n+1)} X_{n+1} + \delta_{np} + \delta_{n\Delta} = 0$$

quedará al introducir el valor (7):

$$X_{n-2}\left(\frac{\alpha_{n-1}}{l_n \cdot l_{n-1}}\right)+X_{n-1}\left(\delta_{n(n-1)}-\frac{\alpha_n}{l_n^2}-\frac{\alpha_{n-1}}{l_{n\cdot}\cdot l_{n-1}}-\frac{\alpha_{n-1}}{l_n^2}-\frac{\alpha_n}{l_{n-1}\cdot l_n}\right)+$$

$$+X_n\left(\delta_{nn}+\frac{\alpha_n}{l_n^2}+\frac{2\alpha_n}{l_{n\cdot}\cdot l_{n+1}}+\frac{\alpha_{n-1}}{l_n^2}+\frac{\alpha_n}{l_{n+1}^2}+\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}^2}\right)-$$

$$-X_{n+1}\left(\delta_{n(n+1)}-\frac{\alpha_n}{l_{n+1}\cdot l_n}-\frac{\alpha_n}{l_{n+1}^2}-\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}^2}-\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}\cdot l_{n+2}}\right)+$$

$$+X_{n+2}\left(\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}\cdot l_{n+2}}\right)+\delta_{np}+\frac{\alpha_n R_n^0-\alpha_{n-1}R_{n-1}^0}{l_n}+\frac{\alpha_n R_n^0-\alpha_{n+1}R_{n+1}^0}{l_{n+1}}=0$$

Denominada “Ecuación de los 5 Momentos” ya que en un apoyo entran los momentos del apoyo y los dos adyacentes más próximos de cada lado.

Para el caso de apoyos rígidos ($\alpha n = 0$) quedan únicamente, al desaparecer todos los términos con αn, la influencia de X_{n-1} , X_n , X_{n+1} , en lo que conocemos como Ecuación de los tres Momentos.

De la resolución de la Ecuación de los 5 Momentos aplicada en cada uno de los apoyos intermedios obtendremos un sistema de **m** ecuaciones con **m** incógnitas Xn solución de nuestro problema.