

TP N° 4.1

A los efectos de su transporte y depósito, el gas se almacena en cilindros cerrados por extremos semiesféricos fabricados de acero, que tienen un límite de fluencia de 2100 kg/cm² y un espesor e = 1,2 cm. Si se desea tener un coeficiente de seguridad $\gamma = 3$, cuál será la presión máxima que puede soportar el cilindro de la figura aplicando las teorías de comparación de:

- a)- Guest.
- b)- Huber-Mises-Hencky.
- c)- Realizar la representación gráfica de Westergard para el estado tensional en cada caso anterior.

Datos:

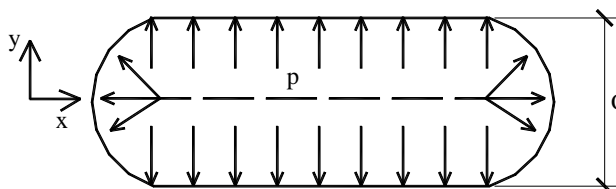
P = ?

$\gamma = 3$ (Coeficiente de seguridad)

$\phi = 85$ cm

e = 1.2 cm

$\sigma_{fl.} = 2100$ kg/cm²



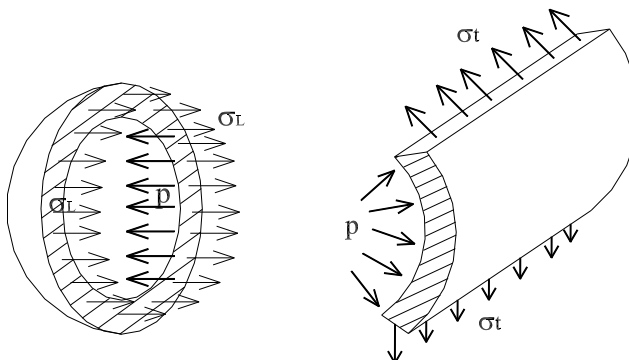
1.- Estado de tensiones en el cilindro

La presión interior del gas origina en las paredes del cilindro un estado doble de tensiones: circunferenciales (σ_t) y longitudinales (σ_l), siendo ambas de tracción.

Verificando la relación:

$$\frac{r}{e} = \frac{42,5 \text{ cm}}{1,2 \text{ cm}} = 35,42 > 10$$

⇒ Envoltura cilíndrica de pequeño espesor

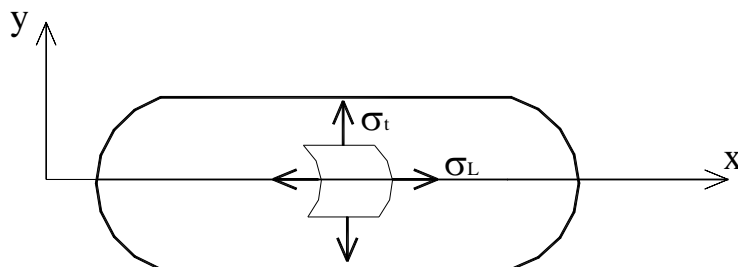


Como el espesor es pequeño despreciamos la variación de tensiones en el espesor ($\sigma_r = \text{cte.}$)

Analizando un cubo diferencial, el estado de tensiones σ_t y σ_l , resultan:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot r}{e}$$

$$\sigma_L = \frac{p \cdot r}{2 \cdot e} = \frac{\sigma_t}{2}$$



$$\sigma_L = \sigma_x = \sigma_t / 2$$

$$\sigma_t = \sigma_y$$

2.- Teorías de falla o comparación

Estas teorías predicen la falla de un elemento estructural mediante la comparación del estado múltiple de tensiones, al que se encuentra solicitado, con los valores obtenidos de un estado de tracción simple (ensayo de tracción fácilmente realizable).

a) – Teoría de Guest

Predice que la falla de un elemento estructural ocurrirá cuando la máxima tensión tangencial $\tau_{m\acute{a}x}$ del estado múltiple de tensiones alcanza el valor de la tensión tangencial máxima del ensayo de tracción simple.

Para el **estado múltiple de tensiones**, en términos de las tensiones principales, podemos escribir que:

$$\tau_{m\acute{a}x\ 1-2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}; \quad \tau_{m\acute{a}x\ 2-3} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}; \quad \tau_{m\acute{a}x\ 1-3} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

siendo

$$\tau_{m\acute{a}x} = MAX \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}, \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}, \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \right]$$

Para el **estado de tracción simple**, resulta:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_c}{2} \quad \text{con} \quad \sigma_c = \sigma_{fl} \quad \acute{o} \quad \sigma_R \quad \acute{o} \quad \sigma_{ADM}$$

Resultando la tensión efectiva o de comparación:

$$\bar{\sigma} = MAX [(\sigma_1 - \sigma_2), (\sigma_2 - \sigma_3), (\sigma_1 - \sigma_3)] = \sigma_c$$

Para este caso, el estado de tensiones resulta un estado de tensiones principales, tal que:

$$\sigma_1 = \sigma_y = \sigma_t; \quad \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_L; \quad \sigma_3 = 0$$

La tensión efectiva o de comparación, resulta:

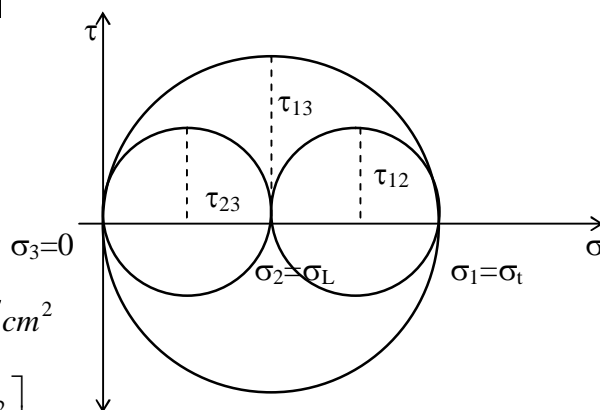
$$\bar{\sigma} = MAX [(\sigma_t - \sigma_L), (\sigma_L), (\sigma_t)] \leq \sigma_{adm}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_t \leq \sigma_{adm}$$

Luego:

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_t = \frac{p \times r}{e} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{fl}}{\gamma} = \frac{2100 \text{ kg/cm}^2}{3} = 700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Rightarrow \left[p_{m\acute{a}x} \leq \frac{\sigma_{adm} \times e}{r} = \frac{700 \text{ kg/cm}^2 \times 1,2 \text{ cm}}{42,5 \text{ cm}} = 19,76 \text{ kg/cm}^2 \right]$$



b) – Teoría de Huber-Mises-Hencky

Predice que la falla de un elemento estructural ocurrirá cuando la energía de distorsión por unidad de volumen (energía de cambio de forma) del estado múltiple de tensiones alcanza el valor de la energía de distorsión del ensayo de tracción simple.

Para el **estado múltiple de tensiones**, en términos de las tensiones principales, podemos escribir que:

$$u_f = \frac{(1+\mu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

Para el **estado de tracción simple**, resulta:

$$u_f = \frac{(1+\mu)}{6E} [2 \cdot \sigma_c^2] \text{ con } \sigma_c = \sigma_{fl} \text{ ó } \sigma_R \text{ ó } \sigma_{ADM}$$

Resultando la tensión efectiva o de comparación:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = \sigma_c$$

Para este caso, el estado de tensiones resulta un estado de tensiones principales, tal que:

$$\sigma_1 = \sigma_y = \sigma_t; \quad \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_L; \quad \sigma_3 = 0$$

La tensión efectiva o de comparación, resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_t - \sigma_L)^2 + (\sigma_L)^2 + (\sigma_t)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_t - \frac{\sigma_t}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{2} \right)^2 + (\sigma_t)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma_t}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{2} \right)^2 + (\sigma_t)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_t^2}{4} + \frac{\sigma_t^2}{4} + \sigma_t^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (\sigma_t^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_t \end{aligned}$$

Luego:

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_t = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p \cdot r}{e} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{fl}}{\gamma} = \frac{2100 \text{ kg/cm}^2}{3} = 700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Rightarrow \left[p_{m\acute{a}x} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_{adm} \cdot e}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{700 \text{ kg/cm}^2 \times 1,2 \text{ cm}}{42,5 \text{ cm}} = 22,82 \text{ kg/cm}^2 \right]$$

c)- Representación de Westergard

La representación gráfica de las teorías de falla se realiza en el espacio de Westergard, en donde se representa el estado de tensiones de un punto en el plano de las tensiones principales.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} \rightarrow x \quad ; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} \rightarrow y$$

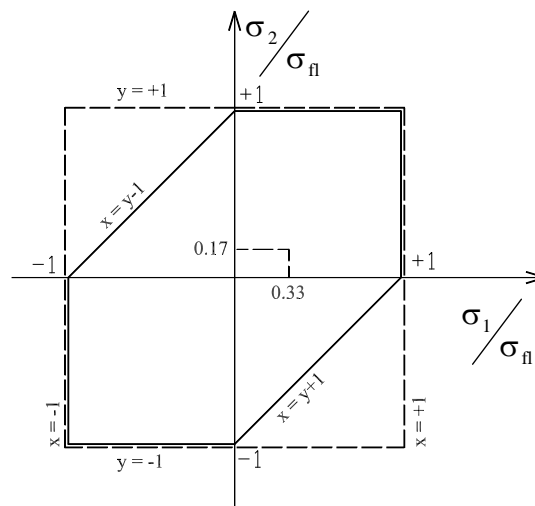
1- Para la teoría de Guest.

Trazado de las rectas límites

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = \pm 1 \quad \rightarrow \quad x - y = \pm 1$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = \pm 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = \pm 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm 1$$



Estado de tensiones en un punto:

$$x = \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = \frac{p \times r}{e \times \sigma_{fl.}} = \frac{19,76 \times 42,5}{1,2 \times 2100} = 0,33$$

$$y = \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = \frac{p \times r}{2 e \times \sigma_{fl.}} = \frac{19,76 \times 42,5}{2 \times 1,2 \times 2100} = 0,17$$

2- Para la teoría de Huber-Mises-Hencky

Trazado de las rectas límites

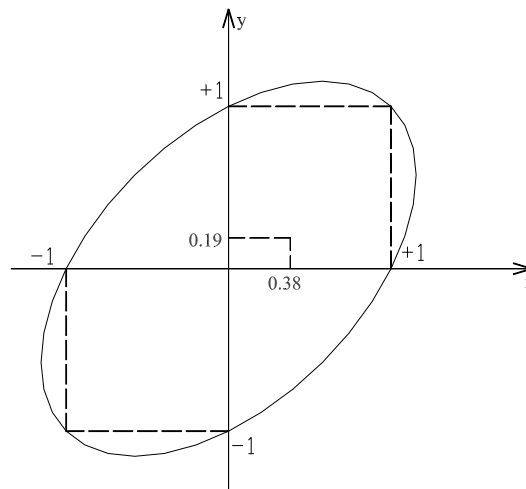
$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} \right)^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} \times \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - x \cdot y = 1$$

→ Ecuación de una elipse con ejes inclinados 45° respecto de las coordenadas y que los cortan en $x = \pm 1$; $y = \pm 1$.

Estado de tensiones en un punto:

$$x = \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl.}} = \frac{p \times r}{e \times \sigma_{fl.}} = \frac{22,82 \times 42,5}{1,2 \times 2100} = 0,38$$

$$y = \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl.}} = \frac{p \times r}{2 e \times \sigma_{fl.}} = \frac{22,82 \times 42,5}{2 \times 1,2 \times 2100} = 0,19$$



TP N°4.2

Para el siguiente estado de tensiones se pide:

Utilizando la representación gráfica de Westergard indicar si el elemento se encuentra en condiciones satisfactorias o no, aplicando las teorías de falla de:

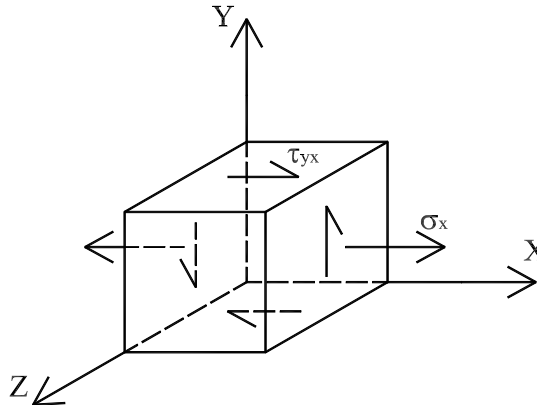
- a) Rankine ($\sigma_{\text{máx.}}$).
- b) Guest ($\tau_{\text{máx.}}$).

Datos:

$$\sigma_{\text{adm.}} = \pm 1,2 \text{tn} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_x = 0,63 \text{tn} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{yx} = 0,76 \text{tn} / \text{cm}^2$$



Calculo de las tensiones principales

Para utilizar la representación de Westergard calculamos el valor de las tensiones principales:

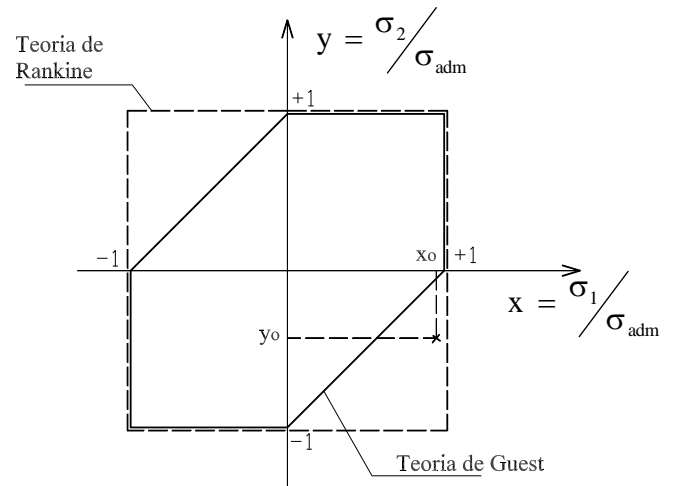
$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = + \frac{0,63}{2} \pm \sqrt{0,63^2 + 4 \cdot 0,76^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1,14 \text{ t} / \text{cm}^2 \\ \sigma_2 = -0,51 \text{ t} / \text{cm}^2 \end{cases}$$

Estado de tensiones en un punto:

$$x = \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}} = \frac{+1,14}{1,20} = +0,95$$

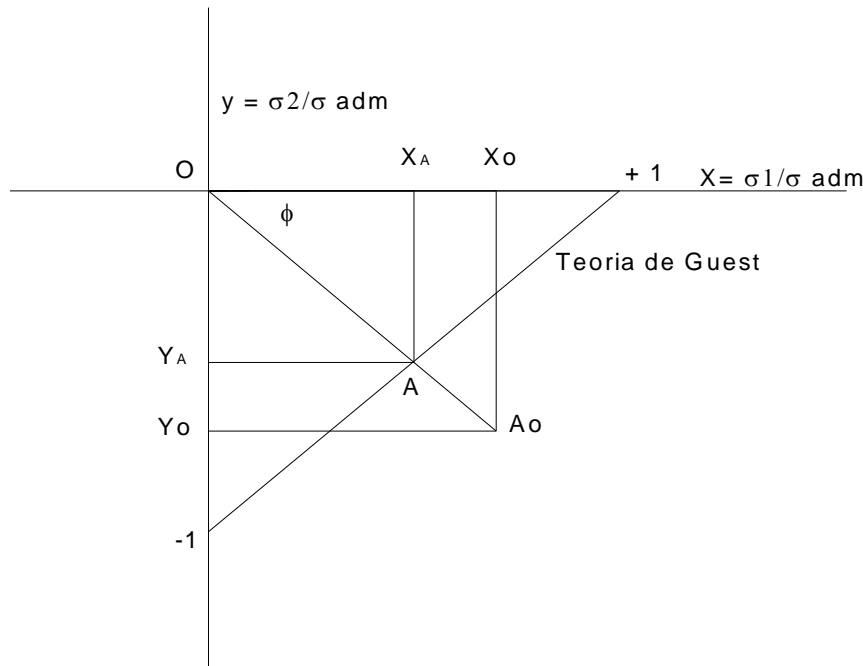
$$y = \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}} = \frac{-0,51}{1,20} = -0,43$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s / \text{Rankine} : \text{cond. satisfactoria} \\ s / \text{Guest} : \text{cond. no satisfactoria} \end{cases}$$



Las coordenadas X_0 e Y_0 indican que este estado tensional, supera los valores admisibles que se obtienen aplicando la Teoría de los τ máx.

Veamos cuanto debe reducirse el esfuerzo para que las tensiones se encuadren en lo previsto por dicha Teoría.



Teoría de Guest

$$X - Y = + 1$$

$$A_o \left\{ \begin{array}{l} X_o = +0,95 \\ Y_o = -0,43 \end{array} \right.$$

$$Tg \phi = \frac{Y_o}{X_o} = \frac{-0,43}{0,95} = -0,453 \quad \phi = - 24^{\circ}35'$$

La recta identificada por el ángulo ϕ , representa el estado tensional en el cubito, según varia el esfuerzo aplicado sobre el cuerpo al que pertenece. (La hipótesis es que la relación entre σ_1 y σ_2 se va a mantener constante aumenta o disminuye el Esfuerzo sobre la pieza).

La relación de los segmentos $\frac{OA_o}{OA}$, indica la proporción en la cual debe disminuir el esfuerzo, para que los valores de tensiones σ_1 y σ_2 se adecuen a la Teoría de Guest.

Recta OA_o $Y = Tg \phi X = -0,453 X$

$$\left. \begin{array}{l} X - Y = + 1 \\ Y = -0,453 X \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_A = +0,688 \\ Y_A = -0,312 \end{array} \right.$$

$$\frac{OA_o}{OA} = \frac{X_o}{X_A} = \frac{0,95}{0,688} = 1,38$$

Para nuestro caso, disminuyendo un 38% el esfuerzo en la pieza, los valores de σ_1 y σ_2 en nuestro cubito, cumplirían con lo requerido por la Teoría de Guest.

TP N°4.3

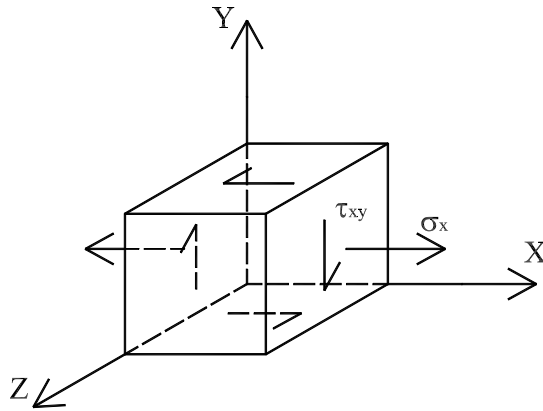
De un elemento de una viga, que está solicitada a esfuerzo normal y de torsión, se extrae un prisma elemental en el cual se pone de manifiesto su estado tensional (ver figura). Teniendo en cuenta que el material de la viga es dúctil y que posee un $\sigma_{fl.} = 3,6t/cm^2$, se desea conocer el coeficiente de seguridad del elemento.

Datos:

$$\sigma_x = 0,50t/cm^2$$

$$\tau_{xy} = 1,27t/cm^2$$

$$\sigma_{fl.} = 3,60t/cm^2$$



Como se trata de un material dúctil, aplicamos la teoría de la Máxima energía de Distorsión o sea la de Huber-Mises-Hencky, para hallar la tensión efectiva o de comparación.

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \times \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

En nuestro caso $\sigma_y = 0$

$$\Rightarrow \sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_c = \sqrt{0,5^2 + 3 \times 1,27^2} = 2,26 t/cm^2$$

Para hallar el coeficiente de seguridad relacionamos la tensión σ_c calculada, con la máxima tensión que resiste éste material ($\sigma_{fl.}$).

$$\left[\gamma = \frac{\sigma_{fl.}}{\sigma_c} = \frac{3,6}{2,25} = 1,6 \right]$$

TP N°.4.4

Sea una pieza estructural que está fabricada de una aleación que fluye a tensión uniaxial, cuando ésta alcanza un valor de $\sigma_{fl} = 3300 \text{ kg/cm}^2$.

Si en servicio, un punto de esta pieza se encuentra sometido a un estado plano de tensiones, como se indica en la figura, **investigar si el material fluye**, teniendo en cuenta el criterio de a) Guest ($\tau_{m\acute{a}x.}$) y de b) H.M.H ($u_{f,m\acute{a}x}$)

Concluya su trabajo con el análisis del estado tensional utilizando la representación gráfica de Westergaard.

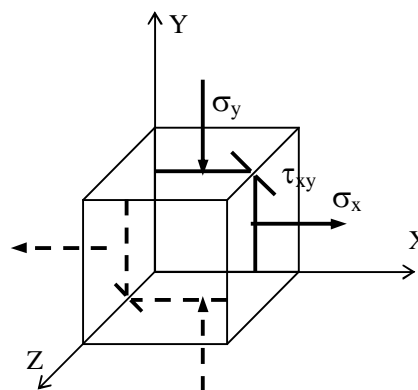
Datos:

$$\sigma_{fl} = 3300 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_x = 1378 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = -689 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{yx} = -1378 \text{ Kg/cm}^2$$



a) – Teoría de Guest

Predice que la falla de un elemento estructural ocurrirá cuando la máxima tensión tangencial $\tau_{m\acute{a}x}$ del estado múltiple de tensiones alcanza el valor de la tensión tangencial máxima del ensayo de tracción simple.

Para el **estado plano de tensiones**, en términos de las tensiones cartesianas, podemos escribir que:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Para el **estado de tracción simple**, resulta:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_c}{2} \quad \text{con} \quad \sigma_c = \sigma_{fl} \quad \text{ó} \quad \sigma_R \quad \text{ó} \quad \sigma_{ADM}$$

Resultando la tensión efectiva o de comparación:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \sigma_c$$

Reemplazando valores:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \sigma_{fl}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{[(1378) - (-689)]^2 + 4 \cdot (-1378)^2} = 3445 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma} = 3445 \text{ Kg/cm}^2 > \sigma_{fl} (3300 \text{ Kg/cm}^2) \Rightarrow \text{FLUYE}$$

b) – Teoría de Huber-Mises-Hencky

Predice que la falla de un elemento estructural ocurrirá cuando la energía de distorsión por unidad de volumen (energía de cambio de forma) del estado múltiple de tensiones alcanza el valor de la energía de distorsión del ensayo de tracción simple.

Para el **estado plano de tensiones**, en términos de las tensiones cartesianas, podemos escribir que:

$$u_f = \frac{(1+\mu)}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2]$$

Para el **estado de tracción simple**, resulta:

$$u_f = \frac{(1+\mu)}{3E} [\sigma_c^2] \quad \text{con} \quad \sigma_C = \sigma_{fl} \quad \text{ó} \quad \sigma_R \quad \text{ó} \quad \sigma_{ADM}$$

Resultando la tensión efectiva o de comparación:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} = \sigma_c$$

Reemplazando valores:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \sigma_{fl}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(1378)^2 + (-689)^2 - (1378) \cdot (-689) + 3 \cdot (-1378)^2} = 3003 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma} = 3003 \text{ Kg/cm}^2 > \sigma_{fl} (3300 \text{ Kg/cm}^2) \Rightarrow \text{NO FLUYE}$$

c)- Representación de Westergard

La representación gráfica de las teorías de falla se realiza en el espacio de Westergard, en donde se representa el estado de tensiones de un punto en el plano de las tensiones principales.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}} \rightarrow x \quad ; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}} \rightarrow y$$

Cálculo de las tensiones principales

$$\sigma_{\text{máx.}}^{\text{mín.}} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} =$$

$$\sigma_{\text{máx.}}^{\text{mín.}} = \frac{((1378) + (-689))}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{((1378) - (-689))^2 + 4 \cdot (-1378)^2} =$$

$$\sigma_{\text{máx.}}^{\text{mín.}} = 344,5 \pm 1722,5 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2067 \text{ Kg/cm}^2 \\ \sigma_2 = -1378 \text{ Kg/cm}^2 \end{cases}$$

Estado de tensiones en un punto:

$$x = \frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}} = \frac{2067}{3300} = 0,63$$

$$y = \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}} = \frac{-1378}{3300} = -0,42$$

A= representa el estado de tensiones en un punto.

