UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

Facultad de Ingeniería

Análisis Matemático II

Guía de Trabajos Prácticos

2018

CARRERA: INGENIERIA CIVIL y ELECTROMECÁNICA (CICLO COMÚN)			
DEPARTAMENTO DE: MATEMÁTICA ASIGNATURA:– **ANÁLISIS MATEMÁTICO II** (Código 05) º APROBADO POR RESOLUCIÓN Nº 166/98 - C.D.			
AREA: CIENCIAS BASICAS			
CARACTER DE LA ASIGNATURA			OBLIGATORIA
REGIMEN	**HORAS DE CLASE**		**PROFESORES**
Cuatrimestral	Por Semana	Total	Prof. Titular: Milena María Balbi Prof. Adjunta: Claudia Durnbeck
	8	***120***	
ASIGNATURAS CORRELATIVAS PRECEDENTES			
Aprobadas			Regularizadas
			Algebra y Geometría *Análisis Matemático I*

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

1. **OBJETIVOS**

Profundizar el entrenamiento en interpretar la simbología y los procedimientos de cálculo más usuales en la ingeniería.

2. **CONTENIDOS**

2.1 CONTENIDOS MÍNIMOS

Análisis vectorial. Aplicaciones. Funciones escalares y vectoriales. Cuádricas. Cálculo diferencial e integral en campos escalares. Aplicaciones. Cálculo diferencial e integral en campos vectoriales. Aplicaciones.

2.2 CONTENIDO ANALÍTICO

UNIDAD I: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
Nociones de Geometría Analítica en E-3 . Representaciones gráficas. Sistemas de coordenadas. Espacio euclídeo de n dimensiones. Entornos. Clasificación de puntos: Interiores, exteriores, de acumulación, aislados, frontera. Conjuntos abiertos, cerrados, acotados. Conjuntos conexos. Funciones de varias variables reales. Dominio. Curvas y superficies de nivel.

UNIDAD II : LÍMITES
Límite doble. Límites iterados. Relación entre el límite doble y los límites iterados o sucesivos. Funciones continuas. Propiedades. Aplicaciones.

UNIDAD III: DERIVADAS Y DIFERENCIALES PRIMERAS
Derivadas parciales para dos variables. Representación geométrica de las derivadas. Derivadas parciales de funciones de más de dos variables. Plano tangente a una superficie. Diferencial de una función de dos variables. Forma analítica de la diferencial. Interpretación geométrica. Existencia de la diferencial. Continuidad de las funciones diferenciables. Derivadas parciales y continuidad. Aplicaciones.

UNIDAD IV: FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS
Funciones compuestas de una variable independiente. Derivación total. Forma invariante de la diferencial. Derivadas direccionales. Representación gráfica. Funciones implícitas de una variable independiente. Existencia de la función implícita. Derivación. Generalización. Derivadas parciales. Aplicaciones.

UNIDAD V: DERIVADAS Y DIFERENCIALES SUCESIVAS
Derivadas parciales sucesivas. Conmutabilidad de la derivación sucesiva. Teorema de Schwartz. Diferenciales parciales sucesivas. Fórmula simbólica. Desarrollo de Taylor y Mac-Laurin para funciones de dos variables. Extremos relativos de funciones de dos variables independientes. Condiciones necesarias para su

existencia. Condiciones suficientes. Extremos relativos de funciones con variables ligadas. Método de los multiplicadores de Lagrange.

UNIDAD VI: GEOMETRÍA DIFERENCIAL
Curvas en el espacio. Longitud de arco. Funciones vectoriales de una variable real: Límites, continuidad, derivación. Propiedades de las derivadas; representación geométrica, interpretación física. Vector tangente unitario. Representaciones paramétricas equivalentes. La longitud de arco normal unitario. Vector binormal. Rectas tangente, normal y binormal. Ecuación de un plano. Triedro móvil. Torsión. Fórmulas de Frenet-Serret.

UNIDAD VII: CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES
Campos escalares y vectoriales. Derivadas de un campo escalar respecto de una dirección. Teorema del Valor Medio. Propiedades de las derivadas. Gradiente. Operador Nabla. Relación entre las derivadas direccionales y el gradiente. Interpretación geométrica del gradiente. Vector normal unitario y plano tangente a una superficie. Divergencia. Interpretación física de la divergencia. Rotacional. Interpretación física del rotacional. Propiedades.

UNIDAD VIII: INTEGRALES PARAMÉTRICAS
Integrales que dependen de un parámetro. Continuidad. Derivación bajo el signo integral: Regla de Leibniz; generalización. Integrales sucesivas.

UNIDAD IX: INTEGRALES MÚLTIPLES
Partición de una región del plano. Integral doble: Definición, propiedades. Reducción de la integral doble a integrales sucesivas. Generalización para integrales definidas en dominios no rectangulares. Aplicaciones geométricas de la integral doble. Aplicaciones físicas. Integrales triples: Definición. Aplicaciones geométricas y físicas de la integral triple. Cambio de variables en una integral doble. Jacobiano.

3. BIBLIOGRAFIA

3.1 BIBLIOGRAIFA BASICA

- ANÁLISIS MATEMÁTICO I Y II - Rey Pastor - Pi Calleja - C. Trejo - Ed. Kapelusz.
- APUNTES DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I Y II- Prof. Antonio B. Mahave.
- ANÁLISIS MATEMÁTICO- Hasser- Lasalle Sullivan - Ed. Triller.
- INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO I Y II - Hebe Rabuffetti.
- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I y II - N. Piskunov.
- INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO Y AL ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Courant John
- ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Tomos I y II - Sadosky - Güber.

3.2 BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Granville, Smith y Longley - Editorial Hutea.
- CÁLCULO DIFERENCIAL - 1175 PROBLEMAS RESUELTOS - Manual Schaum.
- CÁLCULUS - T.M. Apóstol - Tomos I y II.
- ANÁLISIS MATEMÁTICO - T.M. Apóstol.
- MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS - Britton, Kriegh, Rutland - Ed. CECSA.

4. METODOLOGIA DE ENSEÑANZA

Las clases de la materia se imparten dentro del horario establecido en forma teórico práctica, donde los fundamentos teóricos de los distintos temas se introducen mediante explicaciones y seguidamente se los aplican a la resolución de ejercicios y problemas prácticos. Las estrategias para desarrollar los contenidos son diversas, en la teoría se realizan exposiciones dialogadas, técnicas de estudio dirigido, en la práctica las actividades presentadas se pueden resolver de manera individual o grupal, en sus cuadernos y en el pizarrón. Se realizan talleres teóricos y prácticos presenciales, además se trabaja en el aula virtual como soporte para que se logre una mejor comunicación y un proceso contínuo. Se emplean softwares como el Geogebra entre otros.
Los Apuntes de la Cátedra y la guía de Trabajos Prácticos son publicadas al principio del ciclo, en formato impreso por medio del Centro de estudiantes y en el Aula Virtual. Se planifican clases prácticas de repaso previas a los parciales y las clases individuales de consulta sobre cualquiera de los contenidos del programa de acuerdo con las necesidades y disponibilidad de tiempo de los alumnos y de los docentes.

5. RÉGIMEN DE REGULARIZACIÓN Y PROMOCIÓN

El alumno podrá:

1) **<u>Promover la asignatura en forma total con los siguientes requisitos</u>**:
a) Asistir a no menos del 80% de las clases teórico prácticas
b) Tener aprobadas las asignaturas correlativas correspondientes del plan de estudios: Análisis Matemático I y Álgebra y Geometría, al momento de la inscripción. del año del cursado.
c) Aprobar dos parciales prácticos con calificaciones no inferiores a Bueno (7), con la posibilidad de dos recuperatorios prácticos; y aprobar dos parciales teóricos con calificación mínima de Seis (6), con la posibilidad de un recuperatorio teórico.

Cumplimentadas las condiciones antes mencionadas, el alumno tendrá aprobada la asignatura sin examen final.

2) **<u>Regularizar la parte práctica de la asignatura con los siguientes requisitos</u>**:
a) Asistir a no menos del 80% de las clases teórico prácticas.
b) Tener regularizadas las asignaturas correlativas, al momento de la inscripción.
c) Aprobar los dos parciales prácticos, con calificación igual o superior a 6 (seis), con la posibilidad de dos recuperatorios.

Cumplimentadas las condiciones antes mencionadas, el estudiante tendrá la condición de Regular en la materia hasta el 31 de marzo inmediato posterior a la fecha que se cumplan los 3 años de obtenida dicha condición, y deberá rendir un examen final de los contenidos teóricos de la asignatura para aprobar la materia, antes de las ocho mesas posteriores a la obtención de la regularidad. Sino aprobara en dicho período, deberá rendir un examen práctico para regulares previo al examen teórico.

3) **<u>Alumnos libres:</u>**
No cumpliendo ninguna de las condiciones antes nombradas, los alumnos tendrán la posibilidad de rendir como alumnos libres, en mesa de examen final, debiendo aprobar un examen final práctico para libres, eliminatorio de la totalidad de la asignatura, y final teórico oral o escrito.

ACLARACIONES CON RESPECTO A LAS EVALUACIONES:

* Aprobar un examen parcial o final, teórico o práctico, con calificación seis (6), significa acreditar el conocimiento del 60% de los temas evaluados.

* Exámenes parciales prácticos: Se evaluarán en ellos, además de los desarrollos prácticos, conceptos teóricos con preguntas de respuestas breves, que justifiquen dichos procedimientos.

*Exámenes finales para alumnos regulares: Rendirán un examen final teórico que consta de un breve coloquio de conceptos básicos y luego desarrollo de temas, durante las 8 primeras mesas de obtenida la condición.

* Exámenes finales para alumnos libres: Rendirá un examen final práctico, de aprobarse pasarán a la evaluación de la parte teórica, en la que se tomará un breve coloquio de conceptos teóricos básicos y luego desarrollo de temas.

*Los dos exámenes recuperatorios de la parte práctica podrán asignarse ambos a un mismo parcial que no se aprobó o uno para cada uno en el caso que no se hubieren aprobados los dos parciales.

Trabajo Práctico Nº 1: Funciones de varias variables

• REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES

1. Dadas las siguientes superficies, identificarlas, hallar sus trazas, sus intersecciones con los ejes coordenados y representarlas gráficamente.

a) $4x + 2y + 3z - 12 = 0$

b) $16 - 8x + 2y - 4z = 0$

c) $5y + 2z = 10$

d) $z = 4$

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2} = 1$

f) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$

g) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$

h) $x^2 + y^2 = 4$

i) $z = 4 - y^2 \quad para \quad z \geq 0$

j) $z = x^2 + y^2$

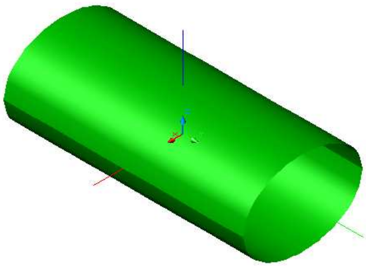
k) $z = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} + 4$

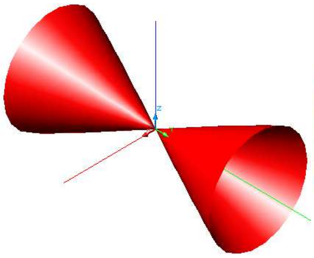
2. Relacione la ecuación con su gráfica (marcada I-VIII). Dé razones para su elección

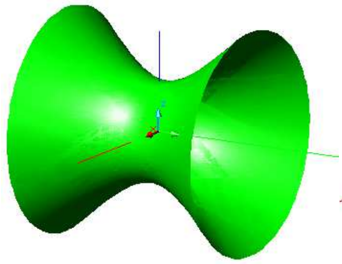
a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$; b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$; c) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

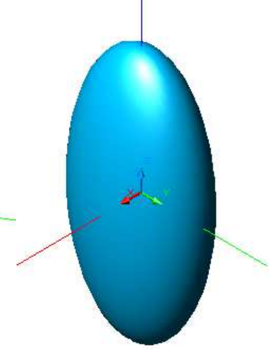
d) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$; e) $y = 2x^2 + z^2$; f) $y^2 = x^2 + 2z^2$

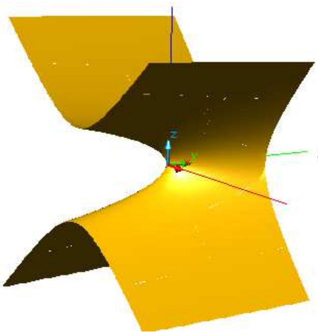
g) $x^2 + 2z^2 = 1$; h) $y = x^2 - z^2$

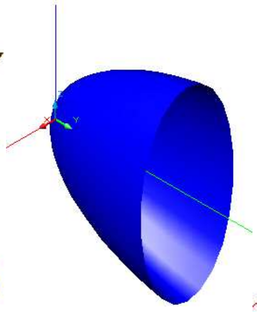

I.

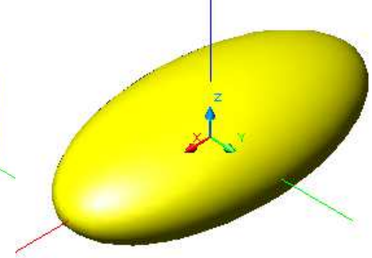

II.

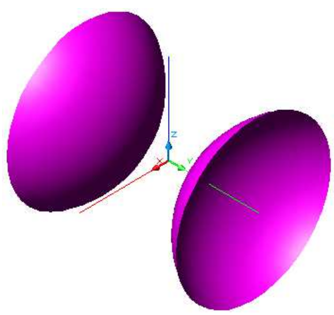

III.


IV.


V.


VI


VII.


VIII.

3. Responda:

a) ¿Qué representa la ecuación $y = x^2$ como una curva en $\Re^2$?

b) ¿Qué representa como superficie en $\Re^3$?

c) ¿Qué representa la ecuación $z = y^2$?

4. Intersecciones entre superficies y volúmenes limitados por superficies: Esquematizar las siguientes regiones

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $z = 0$; $y = 0$; $x = 0$

b) $z = 4 - y^2$; $z = 0$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 4$

c) $z = x^2 + y^2$; $y = 0$; $y = 1$; $x = 0$; $x = 1$

d) $z = x^2 + y^2$; $2x + y - 2z + 4 = 0$ en el primer octante

• FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. $f(x,y) = x^2 + 3\,xy + 5\,y^3 - 2\,y^2 + 8$

Calcular:
a) f(0;0)
b) f(1;0)
c) f(0;2)
d) f(1;1)

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 - 2x}{x^2 + y^2} & \forall (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

Calcular:
a) f(1;0)
b) f(2;2)
c) f(0;0)
d) f(x;0)

3. La altura *h* de las olas en el mar abierto depende de la velocidad *v* del viento y la duración del tiempo *t* que el viento haya estado soplando a esa velocidad. En la siguiente tabla aparecen los valores de la función $h = f(v,t)$ en pies:

a) ¿Cuál es el valor de $f(40{,}15)$? ¿Cuál es su significado?

b) ¿Cuál es el significado de la función $h = f(30,t)$? describa el comportamiento de esta función.

c) ¿Cuál es el significado de la función $h = f(v,30)$? Describa el comportamiento de esta función.

Duración (horas)

Velocidad del viento (km/h)	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

4. Responder si la función está o no definida en los siguientes casos.

$$f(x;y) = \frac{2xy}{y^2 - x^2} \qquad para \quad x = y$$

$$f(x;y) = \frac{sen\ x - sen\ y}{cos^2\ x - sen^2\ y} \qquad para \quad x = y = \frac{\pi}{4}$$

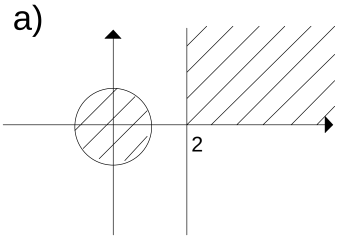
Puntos interiores, exteriores y frontera. Conjuntos abiertos, cerrados, acotados y conexos

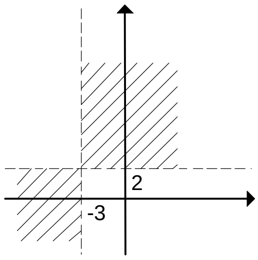
5. Dados los siguientes conjuntos en R^2

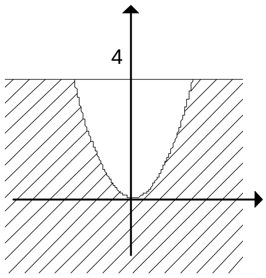
a) Graficarlos
b) Hallar el conjunto derivado (conjunto de puntos de acumulación)
c) Hallar el conjunto de sus puntos interiores
d) Justificar si son conjuntos abiertos o cerrados
e) Definir su frontera
f) Decir si son o no conexos

$$A = \left\{ (x; y) / \ y - \frac{x}{2} \geq 0 \right\}$$
$$B = \left\{ (x; y) / \ y < x^2 \ \wedge \ y < 2 \right\}$$
$$C = \left\{ (x; y) / \left[(x-1)^2 + y^2 < 1 \right] \vee \left[(x-1)^2 + y^2 > 3 \right] \right\}$$
$$D = \left\{ (x; y) / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1 \ \wedge \ y \geq 1 \right\}$$
$$E = \left\{ (x; y) / \ |x + y| \leq 1 \right\}$$

6. Describir analíticamente los siguientes conjuntos de puntos.

a)


b)


c)


• DOMINIO E IMAGEN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. Determinar el dominio y la imagen de las siguientes funciones. Graficar el dominio

a) $z = +\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

b) $z = arc\,sen(x + y)$

c) $z = +\sqrt{xy} + ln(x + y)$

d) $z = \dfrac{2x + 6}{(x^2 - 3x + 2)(y^2 - 16)}$

e) $z = \dfrac{1}{(x^2 - y^2).cos(x + 4y)}$

f) $z = \dfrac{ln(2x - y)}{x^2 + y^2 - 4}$

g) $z = \dfrac{1}{9 - (x^2 + y^2)}$

h) $z = \dfrac{1}{+\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

i) $z = +\sqrt{sen(xy) - 2}$

j) $z = ln\sqrt{xy - 4}$

k) $z = \sqrt{sen(xy)}$

• CURVAS DE NIVEL

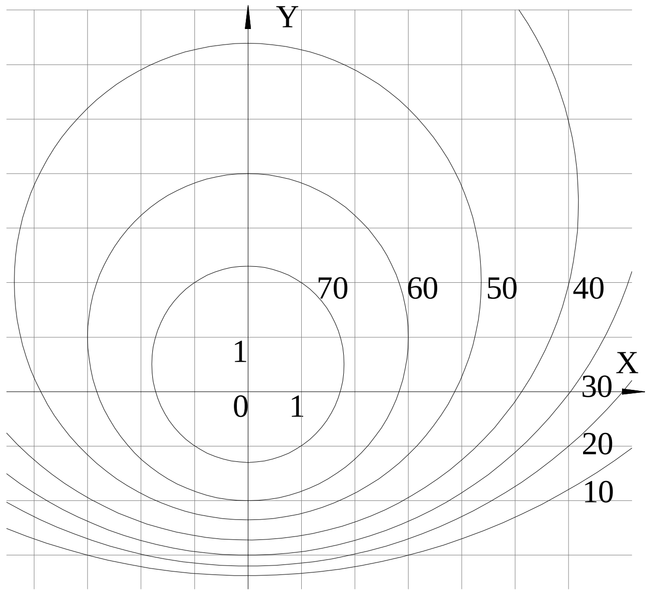
1. Cada una de las siguientes ecuaciones representa el relieve de distintos terrenos. Grafique las curvas de nivel de cada uno de ellos con una separación de 1 m desde 2 m de profundidad y hasta 2 m de altura $\left(z \in Z \text{ y } |z| \leq 2\right)$.

a) $z = x + y$ b) $z = 2xy$ c) $z = \dfrac{2y}{x^2 + 1}$

2. La siguiente ecuación representa la radiación de temperatura dentro de un local en ºC. Graficar las isotermas (curvas de igual temperatura) para hacer un estudio de climatización del mismo. Considerar qué valores extremos puede tomar la temperatura.

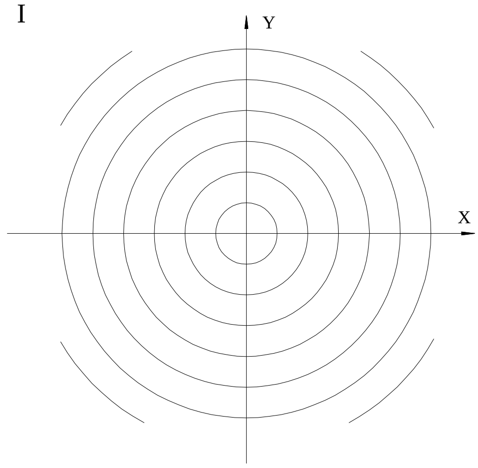
a) $z = x^2 + 3y^2 + 10$ b) $z = 22 - |x| - |y|$

3. A continuación se ilustra un mapa de contornos para una función *f*, utilícelo para estimar los valores de f (-3,3) y f (3,-2). ¿Qué se puede decir acerca de la forma de la superficie?

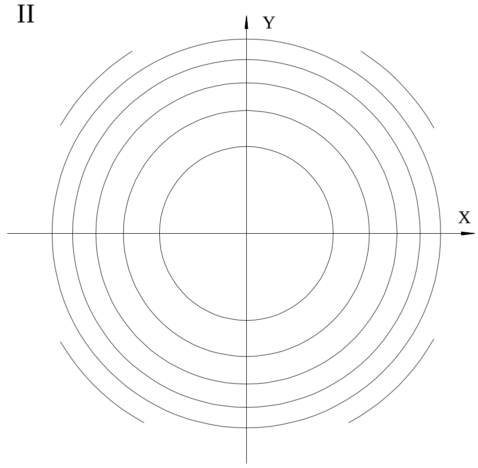


4. A continuación se ilustran dos mapas de contorno. Uno es para una función *f* cuya gráfica es un cono, el otro es para función *g* cuya gráfica es un paraboloide. ¿Cuál es cuál, y por qué?

I

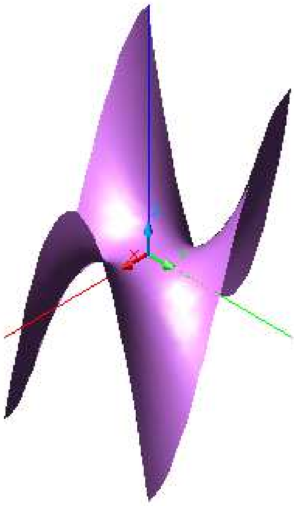


II

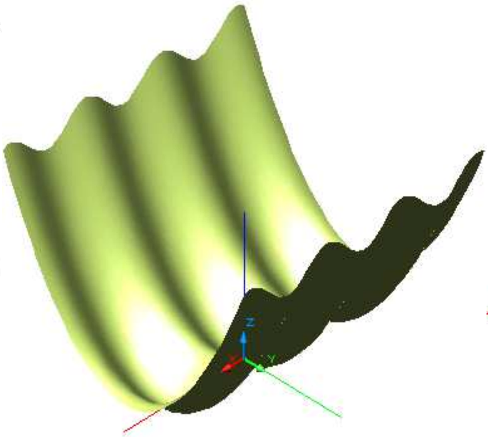


5. Relacione la función con su gráfica y con su curva de nivel. De razones para su elección.

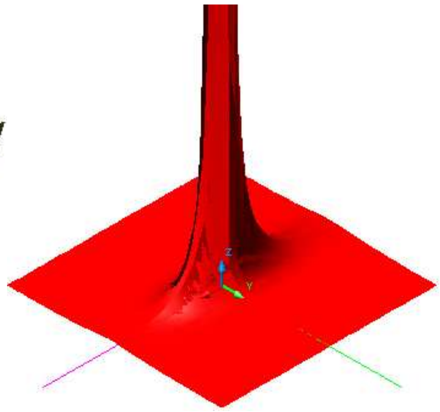
a) $z = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2}$ b) $z = x^3 - 3xy^2$ c) $z = \operatorname{sen}^2 x + \dfrac{1}{4}y^2$



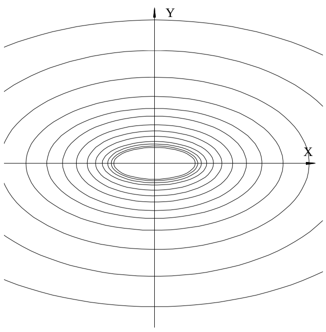
A.



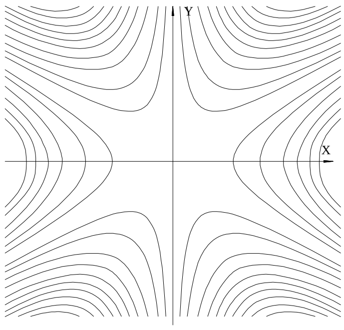
B.



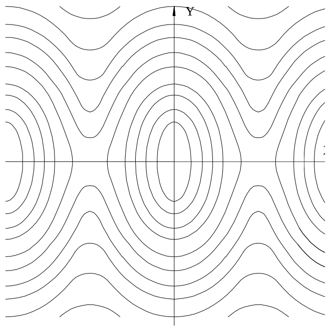
C.



I.



II.



III.

Ejercicios Complementarios:

- **REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES**

1. Dadas las siguientes superficies, identificarlas, hallar sus trazas, sus intersecciones con los ejes coordenados y representarlas gráficamente
   a) $8-2x-4y=0$
   b) $12x+6y-9z=3$
   c) Crear la ecuación de un plano que resulte paralelo al eje ***y***
   d) $4x=8$
   e) $\frac{1}{2}y=3$
   f) Hallar la ecuación de un plano que resulte paralelo al plano ***xz***
   g) Escribir las ecuaciones correspondientes a los tres planos coordenados.
   h) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1 \quad para \quad z\geq 0$
   i) $-2z=4x^2+y^2$
   j) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$
   k) $z=-\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)+9 \quad con \quad z\geq 0$

2. Decir a qué cuádricas corresponden las siguientes ecuaciones y hacer un esquema en cada caso:
   a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
   b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
   c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
   d) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
   e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
   f) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$
   g) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$
   h) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-z$

3. Intersecciones entre superficies y volúmenes limitados por superficies: Esquematizar las siguientes regiones
   a) $z=4-y^2 \quad ; \quad z=4-x^2 \quad ; \quad z=0 \quad ; \quad y=0 \quad ; \quad x=0$
   b) $z=2-x^2 \quad ; \quad \frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ *en el primer octante*.
   c) $z = 4 - x^2 \quad ; \quad y = 2 - x \quad ; \quad y = 2 + x$ *en el primer octante.*
   d) $x^2 + y^2 = 16 \quad ; \quad z = y \quad ; \quad z = 2y$ *en el primer octante*.
   e) $z = \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}+4 \quad ; \quad \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$ *en el primer octante.*
   f) Trace la región limitada por la superficie $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2+y^2=1$ para $1\leq z\leq 2$.
   g) Trace la región limitada por los paraboloides $z=x^2+y^2$ y $z=2-x^2-y^2$.
   h) Encuentre una ecuación para la superficie formada por todos los puntos que equidistan del punto (-1,0,0) y el plano $x=1$. Identifique la superficie.

- **FUNCIONES DE DOS VARIABLES**

1. $f(x,y) = x^5 + 2 \cdot x \cdot y^2 - 5 \cdot y^3 - 1$

Calcular: a) *f(1;0)* b) *f(0;1)* c) *f(1;-1)* d) *f(-1;1)*

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - y^2} & \forall\ |x| \neq |y| \\ 0 & |x| = |y| \end{cases}$

Calcular: a) *f(0;1)* b) *f(a;-a)* c) *f(0;0)* d) *f(-a;a)* e) *f(a;1/a)*

3. Responder si la función está o no definida en los siguientes casos.

a) $f(x;y) = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2}$ *para* $|x| = |y|$

b) $f(x;y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$ *para* $x > y$

Puntos interiores, exteriores y frontera. Conjuntos abiertos, cerrados, acotados y conexos

4. Dados los siguientes conjuntos en $\boldsymbol{R^2}$

a) Graficarlos

b) Hallar el conjunto derivado (conjunto de puntos de acumulación)

c) Hallar el conjunto de sus puntos interiores

d) Justificar si son conjuntos abiertos o cerrados

e) Definir su frontera

f) Decir si son o no conexos

$$A = \left\{ (x;y) / |x - y| \leq 4 \wedge |y - 4| < 2 \right\}$$

$$B = \left\{ (x;y) / 2 \leq x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 8 \right\}$$

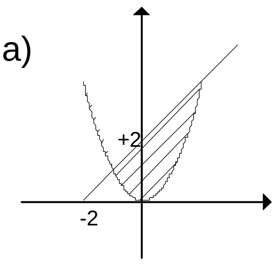
$$C = \left\{ (x;y) / x^2 + y^2 < 1 \ \wedge \ y \geq 0 \right\}$$

$$D = \left\{ (x;y) / 0 \leq x < 2 \ \wedge \ 0 \leq y < 1 \right\}$$

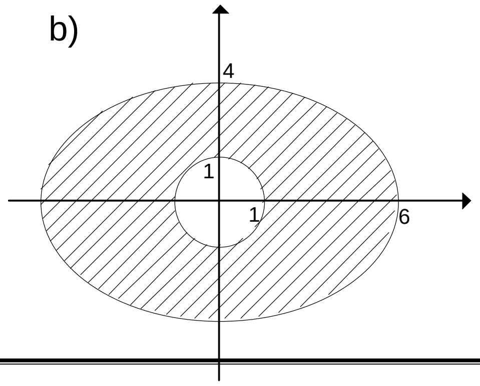
$$E = \left\{ (x;y) / x^2 + y^2 > 0 \right\} \cap \left\{ (x;y) / x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

5. Describir analíticamente los siguientes conjuntos de puntos.

a)



b)



DOMINIO E IMAGEN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1) Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones. Graficarlas

a) $z = \dfrac{1}{sen(x-y)}$

b) $z = +\sqrt{x^2 + 2y^2 - 4}$

c) $z = arc\cos\left|x^2 + y^2 - 3\right|$

d) $z = \dfrac{+\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x-y}$

e) $z = \dfrac{+\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{sen(x-y)}$

f) $z = \dfrac{ln(2x-y)}{+\sqrt{4-x^2}}$

g) $z = \dfrac{1}{ln(x^2 + y^2 - 1)}$

h) $z = \dfrac{1}{+\sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1}}$

i) $z = +\sqrt{xy(1-x-y)}$

j) $z = +\sqrt{ln(xy-4)}$

k) $z = \dfrac{ln(x^2 - y)}{+\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

l) $z = \dfrac{1}{ln(x^2 - y^2)}$

m) $z = \dfrac{1}{ln(x+y-3)}$

2) Encuentre y trace el dominio de la función.

a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

b) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

c) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x-3y}{x+3y}$

e) $f(x,y) = \dfrac{3x+5x}{x^2+y^2-4}$

f) $f(x,y) = \sqrt{y-x}\,\ln(y+x)$

g) $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y}$

h) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2)$

i) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

j) $f(x,y,z) = \ln(16-4x^2-4y^2-z^2)$

3) Sea $f(x,y) = \ln(x+y-1)$

a) Evalúe f (1,1)
b) Evalúe f (*e*,1)
c) Encuentre el dominio de f.
d) Encuentre la imagen de f.

4) Sea $f(x,y) = e^{x^2-y}$

a) Evalúe f (2,4)
b) Encuentre el dominio de f.
c) Encuentre la imagen de f.

5) Sea $g(x,y) = \sqrt{36-9x^2-4y^2}$

a) Evalúe g (1,2).
b) Encuentre y trace el dominio de g.
c) Encuentre la imagen de g.

6) Sea $f(x,y,z) = x^2 \ln(x - y + z)$
 a) Evalúe f (3,6,4).
 b) Encuentre el dominio de f.
 c) Encuentre la imagen de f.

7) Sea $f(x,y,z) = 1 \Big/ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}.$
 a) Evalúe f (1,3,-4).
 b) Encuentre el dominio de f.
 c) Encuentre la imagen de f.

- **CURVAS DE NIVEL**

1. Graficar las curvas de nivel para $z \in Z$ y $|z| \le 2$, de las siguientes superficies

 a) $z = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ b) $z = \dfrac{y - 1}{x^2 + 1}$ c) $z = +\sqrt{1 + x + y}$

 d) $z = x^2 + y^2$ e) $z = x^2 - y^2$

2. En los siguientes casos, considerar los valores que pueden asignarse a z y graficar las curvas de nivel.

 a) $z = \dfrac{y}{x^2 + 3}$ b) $z = 4x + y - 5$

3. Una placa metálica delgada, ubicada en el plano xy, tiene temperatura T(x,y) en el punto (x,y). Las curvas de nivel de T se denominan *isotermas* porque en todos los puntos de una isoterma la temperatura es la misma. Trace algunas isotermas si la función de temperatura está dada por

$$T(x,y) = 100 \big/ \left(1 + x^2 + 2y^2\right)$$

4. Si V (x,y) es el potencial electrónico en un punto (x,y) del plano xy, entonces las curvas de nivel de V se llaman *curvas equipotenciales* porque en todos los puntos de dicha curva el potencial eléctrico es igual. Trace algunas curvas equipotenciales si $V(x,y) = c \Big/ \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, donde c es una constante positiva.

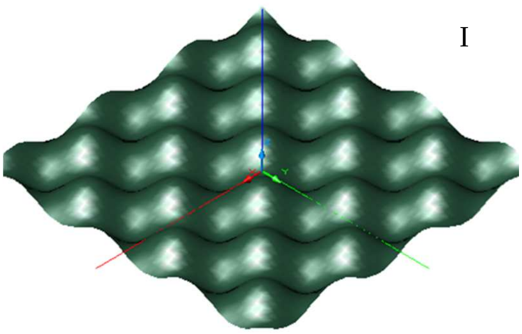
5. Relacione la función con su gráfica y esquematice su curva de nivel. De razones para su elección.

 a) $z = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$

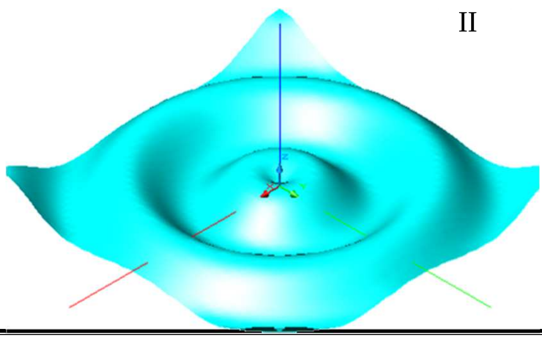
 b) $z = x^2 y^2 e^{-x^2 - y^2}$

 c) $z = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$

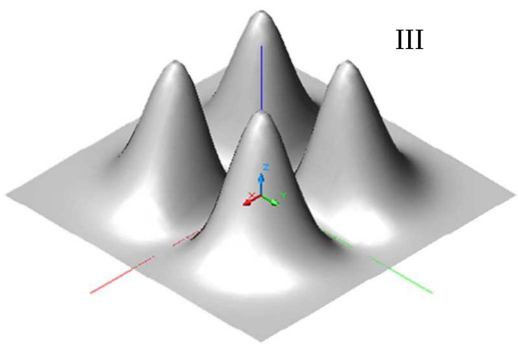
I



II



III



Trabajo Práctico Nº 2: Límites

• LÍMITES

Calcular, si existen, el límite doble y los límites iterados de las siguientes funciones en los puntos indicados. Probar por otros caminos si fuera necesario.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} x^2 + xy$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(9x^2-y^2)sen(2y)}{y(3x-y)}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{(x^2-4)(y^2-9)}{(2x-y)(y-3)}$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{2x^2+2y^2}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{+\sqrt{x^2+y^2}}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+2)sen(xy)}{3xy}$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 4^{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$

• CONTINUIDAD

1) Dadas las siguientes funciones, determinar si son continuas en el origen, justificando la respuesta.

a) $z = \dfrac{xy}{+\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $z = \begin{cases} \dfrac{xy}{+\sqrt{x^2+y^2}} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

c) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 5 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

2) Dadas las siguientes funciones, determinar si son continuas en el punto (1;1) justificando la respuesta.

a) $z = \begin{cases} x+y^3 & (x;y) \neq (1;1) \\ 1 & (x;y) = (1;1) \end{cases}$

b) $z = \dfrac{2x}{+\sqrt{x-y}}$

3) Definir *f(0;0)* para que la función sea continua en dicho punto

a) $z = \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

b) $z = \dfrac{sen(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

c) $z = \dfrac{(x^2-9)sen\ y}{2y(x-3)}$

Ejercicios Complementarios:

• LÍMITES

Calcular, si existen, el límite doble y los límites iterados de las siguientes funciones en los puntos indicados. Probar por otros caminos si fuera necesario.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-3y}{2x+6y}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x-y}{-3x+2y}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-3y^2}{x^2+2y^2}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(3+y^2)\,sen\,x}{x}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\,sen\,y-y^2\,sen\,x}{xy}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ Probar con $y = x$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x-2y}{x-2y}$

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen(xy)}{y}$

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(y^2-x^2)(x^2-3x+2)}{(y-x)(2x-2)}$

11) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{3x-y-7}{x+2}$

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ Probar sobre $y = x$

13) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\,sen\dfrac{1}{x}$

14) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ Probar con $y = x^2$

15) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{xy^2-y^2+x-1}{x-1}$

16) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{xy^2-2y^2-9x+18}{x^2y-3x^2-4y+12}$

17) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x+2y}{4x-5y}$ sobre y = 4x

18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} z$ con $z=\begin{cases} y\cdot sen(\pi/x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

• CONTINUIDAD

1) Dadas las siguientes funciones, determinar si son continuas en el origen, justificando la respuesta.

a) $z=\begin{cases} x+y^3 & (x;y)\neq(0;0) \\ 3 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$

b) $z=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} x\cdot \text{sen}\dfrac{1}{y} & si\ \ y\neq 0 \\ 0 & si\ \ y=0 \end{cases}$

2) Determinar si son continuas en el origen las siguientes funciones

a) $z = \begin{cases} x + y^3 & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

b) $z = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^2}{x^3 + y^3} & x + y \neq 0 \\ 0 & x + y = 0 \end{cases}$

c) $z = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

d) $z = \begin{cases} \dfrac{5y^2x^2}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 5 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

e) $z = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y} & x + y \neq 0 \\ 1 & x + y = 0 \end{cases}$

f) $z = \begin{cases} x.sen\dfrac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

3) Determinar en qué región son continuas las siguientes funciones

a) $z = e^{\frac{1}{xy}}$

b) $z = \dfrac{3x}{+\sqrt{x-y}}$

c) $z = ln(4 - x^2 + y^2)$

d) $z = tg(x^2 + 2xy + y^2)$

e) $z = \dfrac{x}{3x + 5y}$

f) $z = x^2 \, sen\,\dfrac{x}{y}$

4) Definir *f(0;0)* para que la función sea continua en dicho punto

a) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy$

b) $z = y.sen\dfrac{\pi}{x^2 + y^2}$

c) $z = \dfrac{tg(2xy)}{sen(5xy)}$

Trabajo Práctico Nº 3: Derivadas y diferenciales primeras

• DERIVADAS PARCIALES

1) Calcular las siguientes derivadas parciales aplicando la definición de derivada en los puntos indicados

   a) $z = 2x^2y - 3xy^2$ en P_o = (3;-1)   b) $z = 2x^3y - 5xy^2 + 2xy$ en P_o = (2;-3)

   c) $z = sen\,x.\cos y$ en P_o = (0;0)

2) Aplicar las reglas de derivación para calcular las funciones derivadas de las siguientes dadas

   a) $z = (x+y)^2(x-y)^3$ b) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$ c) $z = ln\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

3) Demostrar que si

   a) $z = sen\dfrac{x-y}{x+y}$, entonces es $x.z'_x + y.z'_y = 0$

   b) $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$, se verifica que $u'_x + u'_y + u'_z = 1$

   c) $z = e^{\frac{x}{y}}.ln\ y$, entonces es $x.z'_x + y.z'_y = \dfrac{z}{ln\ y}$

4) Calcular si existe, la derivada parcial respecto de ***x*** en P_o =(0;8) de $z = \sqrt[3]{xy}$

5) Dado el elipsoide $\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{6} = 1$, hallar la pendiente de la recta tangente a la curva intersección del elipsoide:

   a) Con el plano y = 1, en el punto en que x = 4
   b) Con el plano x = 2, en el punto en que y = 3

6) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie $z = x^3 - 6x^2y^2$ con el plano $y = 2$ en el punto P_o =(1;2)

• DIFERENCIALES

1) Calcular el diferencial total de las siguientes funciones

   a) $z = y^2.e^x + x^2.e^y$ b) $z = sen(y.ln\ x)$

   c) $z = arc\ tg\dfrac{y}{x}$ d) $u = x^2y\sqrt{z}$

2) Dada la función $z = x.y$ comparar y hallar la diferencia entre dz y Δz

3) Calcular el diferencial total de $z = x^3y + x^2y^2 + xy^2$ en $P_0 = (1;1)$, con $dx = 0{,}2$ y $dy = 0{,}05$

4) Calcular el valor de la función $z = x^4.y^5$ en $x = 1{,}017$, $y = 0{,}99$, aplicando diferenciales.

5) Calcular el volumen del material necesario para fabricar un vaso cilíndrico de las siguientes dimensiones:

   a) *R*: radio interior del cilindro, *H*: altura interior, *K*: espesor de las paredes y fondo del cilindro
   Dar solución exacta y aproximada.

   b) Medidas interiores: 3 cm de radio y 12 cm de altura, con un espesor de material de 3 mm.
   Dar solución exacta y aproximada.

6) Los lados de un terreno triangular miden 100 y 125 metros con un error de 0,02 m y el ángulo comprendido es de 60º con un error posible de 1º.¿Cuál es el error aproximado en que está medido el terreno?

7) El peso específico de un sólido se da por la fórmula $s = \frac{P}{w}$, en donde, *P* es el peso en el vacío y *w* es el peso de un volumen igual de agua. ¿Cómo afecta al peso específico calculado un error de ±0,1 en el valor de *P* y ±0,05 en el valor de *w*, suponiendo *P* = 8 y *w* = 1 en el experimento: a) si ambos errores son positivos; b) si un error es negativo? C) ¿Cuál es aproximadamente el mayor error porcentual?

8) El período de oscilación de un péndulo es $P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, a) ¿cuál es el mayor error aproximado en el período si hay un error de ±0,04 m en la medida de una suspensión de 3 m, y si *g*, que se toma como 9,80 m/seg^2, puede tener un error de 15 mm/seg^2?; b) ¿cuál es el error porcentual?

Ejercicios Complementarios:

• DERIVADAS PARCIALES

1) Calcular las siguientes derivadas parciales aplicando la definición de derivada en los puntos indicados

   a) $z = 3x^2y^3$ en P_o = (1;2)

   b) $z = 3x^2 - 4xy + 4$ en P_o = (2;1)

   c) $z = e^{x+y}$ en P_o = (0;0)

   d) $z = \sqrt{x+y}$ en P_o = (2;3)

   e) $z = 2xy^2 - xy + y$ en P_o = (2;2)

   f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en P_o = (1;1)

2) Aplicar las reglas de derivación para calcular las funciones derivadas de las siguientes dadas

   a) $z = e^{x-y^2}$

   b) $z = +\sqrt{ln(3x-y)}$

   c) $z = \sqrt[3]{xy^2}\,.sen(xy)$

   d) $z = 4^y x^2 y + arc\,sen\left(\frac{x}{y}\right)$

   e) $z = \frac{x^2.e^{xy}y^2}{2y+x}$

   f) $z = \left(\frac{x}{y}\right)^2 .arc\,tg\frac{y}{x}$

g) $z = \dfrac{y.arc\,tg\,x^2 + ln\,2x}{xy^2 + 1}$ h) $z = \dfrac{3x^2.e^{xy}}{2y^2 + x}$ i) $z = e^{xy}.tg\,\dfrac{x}{y}$

j) $z = \dfrac{2y^2.e^{xy}}{x - y}$ en P (2;1)

3) Demostrar que si

a) $z = \sqrt{x}.sen\dfrac{x}{y}$, entonces es $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = \dfrac{z}{2}$

b) $z = x^2.sen\dfrac{y}{x} + y^2.cos\dfrac{y}{x}$, se verifica que $x.z'_x + y.z'_y = 2z$

c) $z = ln\sqrt{x^2 + y^2}$, entonces es $x.z'_x + y.z'_y = 1$

4) Calcular si existe, la derivada parcial respecto de ***y*** en P_o =(0;4) de $z = \sqrt[3]{xy}$

• DIFERENCIALES

1) Calcular el diferencial total de las siguientes funciones

a) z = 2 x^3 – 4 x y^2 + 3 y^3

b) $z = x^2 \cdot \cos 2y$

c) u = (x – y) ln (x + y)

d) $u = x \cdot y^2 z^3$

2) Calcular Δu y du para la función u = 2 x^2 + 3 y^2, cuando x = 10; y = 8; Δx = 0,2; Δy = 0,3; y comparar los resultados.

3) sea $z = 2xy - y^2$. Calcular Δz y dz en P (1;2) si dx = 0,01 y dy = -0,02

4) Calcular el diferencial total de z = (x + y) $\sqrt{x-y}$ en $P_0 = (6;2)$, con $dx = 0{,}25$ y $dy = -0{,}2$

5) Calcular el diferencial total de la función $z = x.ln\,y - y.ln\,x$ en $P_0 = (1;1)$, con $dx = 0{,}1$ y $dy = -0{,}2$

6) Calcular el valor de la función $z = x^5.y^6$ en $x = 1{,}0017$, $y = 0{,}995$, aplicando diferenciales.

7) Calcular aproximadamente aplicando diferenciales $\sqrt[5]{(3{,}8)^2 + 2.(2{,}1)^3}$

8) Investigar si es diferenciable en el origen la función $z = \begin{cases} \dfrac{x.y}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

9) Al medir un bloque paralelepípedo de madera, han resultado las dimensiones 10, 12 y 20 cm en cada una con un error probable de 0,05 cm cada una. Hallar aproximadamente el máximo error que puede cometerse al calcular el área total del bloque y el porcentaje de error como consecuencia de las medidas individuales.

10) Los radios de las bases de un tronco cónico circular recto miden 5 cm y 11 cm respectivamente, y el lado mide 12 cm; el error máximo de cada medida es de 1 mm. Determinar el error aproximado y el error por ciento al calcular con estas medidas: a) la altura; b) el volumen.

11) Se da la superficie $z = \frac{x-y}{x+y}$. Si en el punto donde $x = 4$, $y = 2$ se aumentan x y y cada uno en 0,1, ¿cuál es el valor aproximado del cambio de z?

12) La resistencia de un circuito se halló empleando la fórmula C = E / R, siendo C = intensidad de la corriente y E = fuerza electromotriz. Si hay un error de 1/10 de amperio en C y 1/20 de voltio en E, a) ¿cuál es el valor aproximado del error de R si las lecturas son C = 15 amperios y E = 110 voltios? b) ¿cuál es el error porcentual?

13) Si para calcular $sen(x+y)$ se emplease la fórmula $sen(x+y) = sen\ x\ cos\ y + cos\ x\ sen\ y$, ¿cuál sería el valor aproximado del error que resultaría si se hiciese un error de 0,1º en la medida tanto de x como de y, y si estas medidas diesen $sen\,x = \frac{3}{5}$ y $sen\,y = \frac{5}{13}$?

14) La aceleración de un cuerpo que se desliza hacia abajo en un plano inclinado, prescindiendo del rozamiento, viene dada por la fórmula $a = g.sen\,i$. Si g varía 3 cm/seg^2, y si el valor de i, que mide 30º, puede tener 1º de error, ¿cuál es el error aproximado del valor calculado de a? Tómese el valor normal de g = 9,80 m/seg^2.

15) Suponiendo que la ecuación característica de un gas perfecto sea $p.v = n.R.t$, en donde v = volumen, p = presión, t = temperatura absoluta, n = cantidad de gas expresada en moléculas gramo (moles) y R una constante, ¿cuál es la relación diferencial entre las diferenciales dv, dp, dt?

16) Aplicado a un caso experimental el resultado del problema anterior, supóngase que hayamos encontrado t =300º, p = 10.000Kg/m^2, v = 0,417 m^3, n = 8,583 y $R = 0{,}8478 \frac{m^3.Kg/m^2}{{}^{o}K.mol}$. Hallar el cambio de p, suponiéndolo uniforme, cuando t cambia a 301º y v a 0,420 m^3.

Trabajo Práctico Nº 4: Funciones compuestas e implícitas

• FUNCIONES COMPUESTAS

1) Sea $z = 3x^2 + 4y - 2xy$, $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = 1$

2) Sea $z = ln(x^2 + y^2)$, $\begin{cases} x = e^{-u} + 2u \\ y = e^{v} - 5v \end{cases}$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$

3) Sea $z = x.e^{xy}$, $\begin{cases} x = sen(2u) + 3v^2 \\ y = \cos(2u) - 2uv \end{cases}$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ en $(u;v) = (0;0)$

4) Sea $u = e^{3xy} + xz^3$, $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t^2 \\ z = 4t \end{cases}$, hallar $\dfrac{du}{dt}$, expresar en función de *t*.

5) Sea $z = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $\begin{cases} x = cost \\ y = sent \end{cases}$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = \dfrac{\pi}{2}$

6) Dada $z = x^3 + y^2$ con $\begin{cases} x = u.cosv \\ y = u.senv \end{cases}$

analizar si se verifica la relación: $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{1}{u^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

• FUNCIONES IMPLÍCITAS

1) Calcular la derivada de las siguientes funciones definidas implícitamente si ***y = f(x)***

a) $x^2y^4 + sen\, y = 0$ b) $e^{-x\cos y} + sen\, y = 0$ c) $2x - \sqrt{2.x.y} + y - 4 = 0$

d) $x^3 + y^3 - 3a.x.y = 0$ e) $e^x\, sen\, y - e^y\, cos\, x = 1$

2) Verificar que los valores dados de ***x*** y de ***y*** satisfacen la ecuación y hallar el valor correspondiente de $\dfrac{dy}{dx}$

a) $x^2 + 2x.y + 2y = 22$; $x = 2$, $y = 3$

b) $Ax + By + Ce^{x.y} = C$; $x = 0$, $y = 0$

c) $e^x\, cos\ y + e^y\, sen\, x = 1$; $x = 0$, $y = 0$

3) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones definidas implícitamente si ***z = f(x;y)***

a) $x^2.z^2 + y.sen(x.z) - 2 = 0$

b) $sen(x.y) + sen(y.z) + sen(x.z) = 0$ en $P(\pi;0;0)$

c) $4x.z + 21 - 3x^2 - sen(y\,z) = 0$ en $P_0\left(-2;\dfrac{\pi}{2};1\right)$

4) Dadas las funciones definidas implícitamente por los siguientes sistemas y suponiendo que se verifican las condiciones de existencia, calcular las derivadas que se piden en cada caso.

a) $\begin{cases} x^3 + 2y^3 - 5z + 1 = 0 \\ x - y + z^3 - 4 = 0 \end{cases}$ Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$

b) $\begin{cases} x^5 + y = t \\ x^2 + y^3 = t^2 \end{cases}$ Hallar $\dfrac{dx}{dt}$ y $\dfrac{dy}{dt}$

c) $\begin{cases} xu^2 + v = y^3 \\ 2yu - xv^3 = 4x \end{cases}$ Hallar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

Ejercicios Complementarios:

• FUNCIONES COMPUESTAS

1) Sea $z = 3x^2 + y - 2y^2$, $\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = 1$

2) Sea $z = ln(x^2 + y^2)$, $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{t} \end{cases}$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = 0$

3) Sea $z = x^3 + y^2 - 2xy$, $\begin{cases} x = u + 3uv \\ y = v^2 - 3v + uv \end{cases}$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ en $(u;v) = (1;2)$

4) Sea $z = \dfrac{2xy}{+\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\begin{cases} x = cos\,t \\ y = sen\,t \end{cases}$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = 0$

5) Sea $z = \dfrac{x^3}{y^3}$, $\begin{cases} x = sen\,2t \\ y = -cos\,t \end{cases}$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = \dfrac{\pi}{3}$

6) Sea $u = 2x^2 - y.z + x.z^2$, $\begin{cases} x = 2\,sen\,t \\ y = t^2 - t + 1 \\ z = 3e^t \end{cases}$, hallar $\dfrac{du}{dt}$ en $t = 0$

7) Dada $z = x.\ln y + y.\ln x$, $\begin{cases} x = e^{u+v} \\ y = e^{u-v} \end{cases}$, demostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 2\left(\ln y + \dfrac{y}{x}\right).e^{u+v}$

8) Demostrar que si $z = arctg\dfrac{x}{y}$, $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$, se verifica que $z'_u + z'_v = \dfrac{u-v}{u^2+v^2}$

9) Sea $z = \dfrac{6xy}{+\sqrt{y^2+x^2}}$, $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = -\operatorname{sen} 2t \end{cases}$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ para $t = \dfrac{\pi}{2}$

10) f(x,y)= $x^2y + 5xy^2 - 3$ $para \begin{cases} x = 2t^2 \\ y = e^t \end{cases}$, hallar $\dfrac{df}{dt}$ en el punto $t = 1$

• FUNCIONES IMPLÍCITAS

1) Calcular la derivada de las siguientes funciones definidas implícitamente si ***y = f(x)***

   a) $15x = 15y + 5y^3 + 3y^5$
   b) $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$
   c) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$
   d) $\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \sqrt{\dfrac{x}{y}} = 6$
   e) x cos xy = 0

2) Verificar que los valores dados de ***x*** y de ***y*** satisfacen la ecuación y hallar el valor correspondiente de $\dfrac{dy}{dx}$

   a) $x^3 - y^3 + 4.x.y = 0$; $x = 2$, $y = -2$
   b) $2x - \sqrt{2.x.y} + y = 4$; $x = 2$, $y = 4$
   c) $e^x \cos(x+y) - y = 1$ en el origen.
   d) $x^2 + xy + 2y^2 = 28$; (2,3)
   e) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 5$; (2,3)
   f) $x^3 - axy + 3ay^2 = 3a^3$; (a,a)

3) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones definidas implícitamente si ***z = f(x;y)***

   a) $x + y + z = \operatorname{sen}(x.y.z)$ en el origen.
   b) $x + 3y + 2z - \ln z = 0$

c) $2\,sen(x.y.z) + z.x^3 - y^3 + 1 = 0$

d) $z^2.e^{xy-2} + 2x - 4y - z = 0$

4) Dadas las funciones definidas implícitamente por los siguientes sistemas y suponiendo que se verifican las condiciones de existencia, calcular las derivadas que se piden en cada caso.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 8 \\ x^2 - 3y^2 = z \end{cases}$ Hallar $\dfrac{dy}{dz}$ y $\dfrac{dz}{dy}$

b) $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$ Hallar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

c) $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$ Hallar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5: Derivadas y diferenciales sucesivas

• DERIVADAS SUCESIVAS

1) Verificar la relación de Schwarz en las siguientes funciones:

a) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{xy^2}{8}$ b) $z = \frac{y}{x-y}$

2) Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones

a) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ b) $z = \text{sen}(y.\ln x)$

c) $z = ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{sen(xy)}}$ d) f(x,y) $= x \cdot \ln\frac{x}{y} + y \cdot \ln\frac{y}{x}$

3) Demostrar que si

a) $z = \frac{xy}{x-y}$, se verifica que $x^2.z''_{xx} + 2xy.z''_{xy} + y^2.z''_{yy} = 0$

b) $z = \frac{x^2 - y^2}{2x+3y}$, se verifica que $\frac{z''_{xy}}{z''_{yy}} = -\frac{y}{x}$

• DIFERENCIALES SUCESIVAS

1) Hallar d^2z en P_o=(1;2) si $z = x^3y^2 - 5x^2y^3$

2) Si $z = 4x^4y^2$ hallar d^3z

• SERIES DE TAYLOR Y MAC LAURIN

1) Desarrollar $z = ln(xy)$ en el entorno del punto $P_0 = (1;1)$ hasta el 2º orden.

2) Desarrollar las siguientes funciones en un entorno del punto indicado o en las potencias indicadas aplicando las fórmulas de Taylor o Mac Laurin según corresponda, hasta las derivadas terceras inclusive.

a) $z = x^3 + 2xy - x + y^3$ en un entorno del punto $P_0 = (1;2)$

b) $z = e^x.cos\ y$ en un entorno del origen.

c) $z = e^{xy}$ en un entorno del punto $P_0 = (1;1)$ y hallar aproximadamente $f(1{,}1;1{,}2)$

d) $z = e^{x+y}$ en potencias de $(x-1)$ y de $(y-1)$.

3) Verificar el siguiente desarrollo:

$$\cos x \cos y = 1 - \frac{x^2+y^2}{2!} + \frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!} - \frac{x^6+15x^4y^2+15x^2y^4+y^6}{6!} + \ldots$$

• EXTREMOS RELATIVOS

1) Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $z = x^2 + 4x + 2y + 2y^2$

b) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

c) $z = x^3 + y^3 + \dfrac{48}{x} + \dfrac{48}{y}$

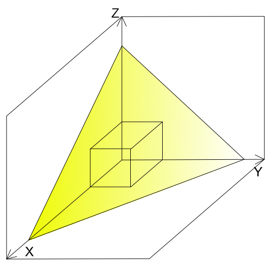
d) $z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 1$

e) $z = e^{-x^2 - 2xy - y}$

2) Hallar k para que $z = x^2 + 3xy + ky^2$ tenga mínimo relativo en algún punto de su dominio.

3) Dividir un número ***a*** en tres partes tales que su producto sea máximo.

4) En la parte superior de un edificio, en un espacio vacío limitado por dos paredes verticales perpendiculares, una losa horizontal y un techo inclinado que responde a la siguiente ecuación: $z = 2 - x - y$, se quiere proyectar en el mismo un tanque para agua con la mayor capacidad posible. Calcular las dimensiones del tanque y su capacidad.



Ejercicios Complementarios:

• DERIVADAS SUCESIVAS

1) Verificar la relación de Schwarz en las siguientes funciones:

a) $z = \ln(x^2 + y)$

b) $z = \dfrac{Ax + By}{Cx + Dy}$

2) Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones

a) $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$

b) $z = x^{y^2}$

c) $z = e^x \, ln\, y + sen\, y . ln\, x$ d) f(x,y) $= \cos[\ln(x\, y)]$

3) Demostrar que si

a) $z = cos(2x + y) + sen(2x - y)$, se verifica que $z''_{xx} - 4.z''_{yy} = 0$

b) $z = e^{-t}.(sen\, x + cos\, y)$, se verifica que $z''_{xx} + z''_{yy} = z'_t$

• DIFERENCIALES SUCESIVAS

1) Hallar $d^2 z$ si $z = y^3 x^2 + 4 y^2 x^4$

2) Hallar $d^3 z$ si $z = e^{x^2 + y^2}$

• SERIES DE TAYLOR Y MAC LAURIN

1) Desarrollar las siguientes funciones en el entorno de los puntos indicados hasta el 2º orden

a) $z = sen(2xy)$ en $P_0 = \left(\frac{\pi}{4};1\right)$

b) $z = x.e^y$ en $P_0 = (1;0)$

2) Desarrollar las siguientes funciones en un entorno del punto indicado o en las potencias indicadas aplicando las fórmulas de Taylor o Mac Laurin según corresponda, hasta las derivadas terceras inclusive.

a) $z = e^{x+2y}$ en un entorno del punto $P_0 = (2;0)$

b) $z = sen(x + y)$ en potencias de $\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \left(y - \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $z = sen\left(x - 2y^2\right)$ en un entorno del origen.

d) $z = e^x.ln(1 + y)$ en un entorno del punto $P_0 = (0;0)$

3) Verificar los siguientes desarrollos:

a) $a^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2}\left(2xy \ln a - y^2 + x^2 y \ln^2 a - x y^2 \ln a\right) + \frac{1}{3} y^3 + \ldots$

b) $sen(x+y) = x + y - \dfrac{x^3 + 3x^2 y + 3x y^2 + y^3}{3!} + \ldots$

• EXTREMOS RELATIVOS

1) Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

b) $z = x^3 + y^3 + 3x - 12y + 20$

c) $z = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1$

d) $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

e) $z = x^3 + y^2 - 3x$

f) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 2$

g) $z = 5 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$

h) $z = \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + x^3 - 5x^2 - 2y^2 + 3y$

i) $z = x^4 + y^4 + x^2 + y^2$

j) $z = e^{-\left(x^2+2x-1\right)-\left(y^2-y\right)}$

k) $z = (x-1)^2 + 2y^2$

l) $z = 3x^2 + xy$

m) $z = e^x \cos y$

n) $z = 2x^3 + 16y^3 - 9xy$

o) $z = x^3 + y^3 - 6x - 9y + 2$

2) Hallar k para que $z = x^2 + kx + y^2$ presente un punto crítico en $P_0 = (-1;0)$. Clasificarlo.

3) Hallar k para que $z = x^2 + 2xy + ky^2 + 4x + 6y$ presente un punto crítico en $P_0 = \left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Clasificarlo.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 6: Integrales paramétricas:

1) Resolver las siguientes integrales paramétricas:

a) $\int_1^e \frac{y}{x} dx$ b) $\int_1^2 \left(x^2 y + 2x\right) dy$ c) $\int_0^1 \frac{2y}{1+x^2} dx$

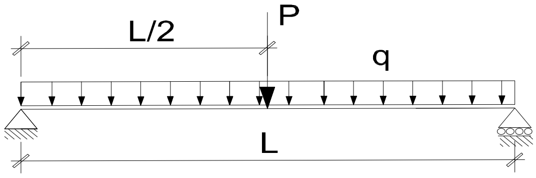
d) $\int_0^{\pi/2} x \cdot y \cdot seny \cdot dy$

2) Derivación bajo el signo integral
Hallar las derivadas de las siguientes integrales paramétricas:
1º : Por la fórmula de Leibniz.
2º : Integrando previamente.

a) $\frac{d}{dy}\int_0^5 \left(4x^2 y + 3xy^3\right) dx$ $\frac{d}{dx}\int_0^{\pi/2} 3xy \cdot \cos y \cdot dy$

3) Se sabe por el teorema de Castigliano que el descenso en una viga debajo de una carga es igual a la derivada de la energía respecto de esa carga.
Si para la siguiente viga la energía es:

$$U = \int_0^{L/2} \frac{\left(\frac{P}{2} \cdot x + q \cdot \frac{L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}\right)^2}{EI} dx$$



Se pide calcular el descenso en el punto medio de la viga con la fórmula de Leibniz e integrando previamente.

Descenso: $\delta = \frac{\partial U}{\partial P}$ Datos: q = 1 t/m L = 5 m E · I = 75600 tm^2

Nota:
Derivar antes de reemplazar el valor de P.

4) Integrales Sucesivas
Resolver:

a) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$

b) $\int_b^{2b} \int_0^a (a-y) \cdot x^2\ \mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$

c) $\int_1^2 \int_0^{y/2} y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$

d) $\int_1^2 \int_y^{y^2} (x+2y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$

Ejercicios Complementarios:

1) Integrales paramétricas
Resolver las siguientes integrales paramétricas:

a) $\int_0^1 2xy^2 e^{x^2}\,dx$ b) $\int_0^3 arctg\sqrt{y^2-16}\cdot\left(1-x^2\right)dx$ c) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x^2 y\cdot\cos y^2\ \mathrm{dy}$

d) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{y}x^3 sen\, x^2 dx$ e) $\int_0^x \ln\left(y^2+3x\right)dy$

2) Derivación bajo el signo integral
Hallar las derivadas de las siguientes integrales paramétricas:
1º : Por la fórmula de Leibniz.
2º : Integrando previamente.

a) $\dfrac{d}{dx}\int_0^1\left(xy-3\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)dy$

b) $\dfrac{d}{dy}\int_0^{\pi/2} xy^2\cdot sen\ \mathrm{x\ dx}$

3) Integrales Sucesivas

a) $\int_0^{2\pi}\int_{a\,sen\,\theta}^{a} r\,dr\,d\theta$ b) $\int_2^3\int_0^1 \dfrac{dy\ dx}{(x+y)^2}$ c) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy$

TRABAJO PRACTICO Nº 7: Integrales múltiples

1) Calcular las siguientes integrales dobles:

a) $\iint_A (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ donde A = $\{(x, y);\ 0 \le x \le 1; -1 \le y \le 0\}$

b) $\iint_R 3xy^2\,dx\,dy$ donde R = $\{(x, y);\ -1 \le x \le 0;\ 2x \le y \le 2x^2\}$

c) $\iint_T \dfrac{x^2 + y^2}{x}\,dx\,dy$ donde T = $\{(x, y);\ x \le 1; y \le 1;\ x + y \ge 1\}$

2) Hallar por integración doble el área de la superficie limitada por los siguientes pares de curvas:

a) $3y^2 = 25x$; $5x^2 = 9y$

b) $x^2 + y^2 = 10$; $y^2 = 9x$

c) $y^2 = 4x$; $2x – y = 4$

d) $x^2 + y^2 = 9$; x=y; x=-y; con $x \ge 0$

3) Hallar por integración doble el área de la superficie limitada por: $(x-3)^2 + y^2 = 9$; $(x-6)^2 + y^2 = 36$; y = x e y = 0 utilizando coordenadas polares.

4) Hallar el volumen limitado por el paraboloide circular: $4z = 16 – x^2 – y^2$ y el plano “xy”:

a) En el primer octante.
b) En los octantes correspondientes a $z \ge 0$

Sugerencia: utilizar coordenadas polares.

5) Hallar el volumen en el primer octante comprendido entre los planos: z = 0 y z = x + y + 2 , interior al cilindro: $x^2 + y^2 = 16$.
Resolver utilizando coordenadas rectangulares y polares.

6) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2 +1$ y el plano x + y = 1 y los planos coordenados.

7) Un cuerpo está limitado por el cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ y los planos y = 0 ; z = 0 ; y = x. Calcular su volumen.

8) Hallar los momentos de inercia Ix e Iy y los radios de giro correspondientes para la superficie situada arriba de 0x y limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ y la recta y = x.

9) Calcular el momento de inercia del triángulo limitado por las rectas x + y = 2 ; x =2 e y = 2, con respecto al eje 0x.

10) Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las parábolas: $y^2 = 4x + 4$; $y^2 = -2x + 4$.

11) Resolver las siguientes integrales triples:

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} x\,y\,z\ dx\,dy\,dz$

b) $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 dz\,dy\,dx$

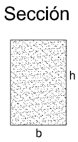
12) Calcular el volumen del tetraedro limitado por los planos x + y + z = 1; x = 0 ; y = 0 ; z = 0.

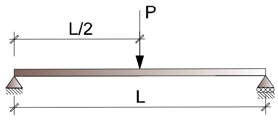
13) Calcular el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$ y $z = 6$.

14) Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$. Sugerencia: utilizar coordenadas cilíndricas.

15) Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloide $y^2 + 2z^2 = 4x$ y el plano $x = 2$.

16) Una viga de 2 m de longitud de sección rectangular cuya base mide 10 cm y altura 20 cm está sometida a una carga puntual de 100 Kg aplicada en la mitad de su luz. La tensión admisible del material es de 7,6 Kg/cm². a) Verificar la tensión máxima de la viga. b) Si la viga se dispusiera en forma horizontal (rotándola 90º), hallar la tensión máxima y compararla con la admisible. (Expresión de la tensión máxima: $\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_n}$, siendo $M_{max} = \frac{Pl}{4}$, $y_{max} = \frac{h}{2}$).





Ejercicios Complementarios:

1) Calcular la siguiente integral doble utilizando coordenadas rectangulares y polares:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy \qquad \text{donde } D = \left\{(x;y) / x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

2) Hallar por integración doble el área de la superficie limitada por los siguientes pares de curvas:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{b}$; $x + y = b$ b) $y = \text{sen } x$; $y = \cos x$; $x = 0$

c) $y^2 = x^3$; $y = x$ d) $4x^2 + y^2 = 16$; $x = 0$; $y = 0$

3) Hallar el área de la región exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4a^2$ e interior a la circunferencia $(x - 2a)^2 + y^2 = 4a^2$ utilizando coordenadas polares.

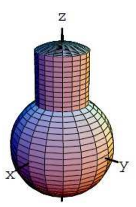
4) Calcular el volumen de los cuerpos delimitados por las siguientes superficies:

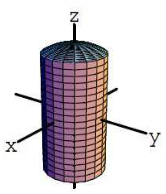
a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ b) $x^2 + y^2 = b^2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $\frac{y}{b} + \frac{z}{b} = 1$

c) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 27$

5) Hallar el centro de gravedad del triángulo cuyos vértices son A(0;2) ; B(3;2) y C(3;5). También determinar los momentos estáticos de dicha figura respecto de los ejes *x* e *y* .

6) Hallar el volumen que se elimina cuando a una esfera de radio *2a* se le practica un orificio circular de radio *a* de forma que el eje del orificio sea un diámetro de la esfera.





7) Hallar los momentos de inercia Ix e Iy de las siguientes figuras:

a) $y^2 = 1 + x$; $x = 1 + y$ b) $y = x^2$; $y = x$

8) Determinar el centro de gravedad de la semiesfera generada por la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 25$; que gira alrededor del eje y.

9) Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado por la curva representada por la función y = x^3 , entre x = 0 y x = 2 al girar alrededor del eje y.

10) Hallar el momento de inercia del cuerpo de revolución de densidad ρ engendrado por la curva y = 2 x^2 al girar alrededor del eje y entre x = 0 y x = 2, con respecto al eje y.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 8: Geometría diferencial

1) Dados los siguientes vectores:

$\vec{A} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{B} = 6\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 3\vec{k}$

Hallar:

$a)\ \vec{A} + \vec{B}$ b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ c) $\vec{A}\ x\ \vec{B}$

2) Siendo:

$$R = e^{-t}\,\vec{i} + \ln(t^2+1)\,\vec{j} - \operatorname{tg} t\,\vec{k}$$

Hallar: $\dfrac{dR}{dt}$; $\dfrac{d^2R}{dt^2}$; $\left|\dfrac{dR}{dt}\right|$; $\left|\dfrac{d^2R}{dt^2}\right|$ para t = 0

3) Demostrar las siguientes propiedades:

a) $\dfrac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B}) = \dfrac{d}{dt}\vec{A} + \dfrac{d}{dt}\vec{B}$

b) $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\ \mathrm{x}\ \vec{B}) = \vec{A}\ \mathrm{x}\ \dfrac{d\vec{B}}{dt} + \dfrac{d\vec{A}}{dt}\ \mathrm{x}\ \vec{B}$

4) Una partícula se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = e^{-t}$; y = 2 cos 3t ; z = 2 sen 3t ; siendo t el tiempo. Hallar su velocidad y la aceleración en el instante inicial t = 0.

5) Una partícula se mueve a lo largo de una curva $x = 2\,t^2$; $y = t^2 - 4\,t$; z = 3 t ; siendo t el tiempo. Hallar las componentes de la velocidad y la aceleración transcurrido 1 segundo en la dirección $\vec{i} - 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$.

6) Una partícula se mueve de forma que su vector de posición viene dado por:
$\vec{r}$ = cos wt $\vec{i}$ + sen wt $\vec{j}$, siendo w una constante. Demostrar:
a) que la velocidad $\vec{V}$ de la partícula es perpendicular a $\vec{r}$.
b) que $\vec{r}$ x $\vec{V}$ es una constante.

7) Hallar la función vectorial $\vec{F}$ (t) que representa la recta l que pasa por el punto (1,2,3) y es paralela a un vector $3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$.
a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta.
b) Hallar la ecuación del plano normal a la recta en el punto.

8) Siendo $\vec{r}$ = sen t $\vec{i}$ +cos t $\vec{j}$ + t $\vec{k}$, hallar: en el punto correspondiente a t = 0

a) Un vector tangente.
b) Un vector tangente unitario.
c) Ecuación de la recta tangente.
d) El vector curvatura y radio de curvatura.
e) Ecuación del vector normal unitario y de la recta normal.
f) Ecuación del vector binormal y recta binormal.
g) Ecuaciones de los planos osculador, rectificante y normal en dichos puntos.

9) Hallar la longitud del arco de una circunferencia definida por:
x = 2 cos t y = 2 sen t z = 2 para $0 \leq t \leq \pi/2$

10) Calcular el camino recorrido por una partícula sobre la trayectoria:
$x = t^3$ $y = 2/3t^3+5$ $z = 2t^3-1$ con $1 \leq t \leq 3$

Ejercicios Complementarios:

1) Dados los siguientes vectores:

$$\vec{A} = 3\,\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad ; \quad \vec{B} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 3\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{C} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + \vec{k}$$

Hallar:

a) $\vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C}$, $2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C}$

b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{C}$, $\vec{B} \cdot \vec{C}$

c) $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{B} \times \vec{C}$

d) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

2) Siendo:

a) $\vec{r} = 2t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j} - e^t\,\vec{k}$ para t = 1

b) $\vec{r} = 2\cos t\,\vec{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\vec{j} - 3t\,\vec{k}$ para $t = \pi/2$

Hallar:

$$\frac{dr}{dt} \; ; \; \frac{d^2r}{dt^2} \; ; \; \left|\frac{dr}{dt}\right| \; ; \; \left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|$$

3) Demostrar las siguientes propiedades:

c) $\dfrac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A}\,\dfrac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}\,\dfrac{d\vec{A}}{dt}$

d) $\dfrac{d}{dt}(\phi\vec{A}) = \phi\dfrac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}\,\dfrac{d\phi}{dt}$ donde ϕ es una función escalar.

4) Una partícula se mueve a lo largo de una curva, cuyas ecuaciones son $x = 3 \cos 2t$, $y = 3 \cos 2t$, $z = 3$. Calcular los valores de la velocidad y la aceleración en el instante $t = \pi/2$.

5) Una partícula se mueve a lo largo de una curva $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t$; siendo t el tiempo. Hallar las componentes de la velocidad y la aceleración transcurridos 3 segundos en la dirección $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

6) Siendo $\vec{r} = \operatorname{sen} t\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j} + t\ \vec{k}$, hallar: en el punto correspondiente a $t = \pi/2$

a) Un vector tangente.
b) Un vector tangente unitario.
c) Ecuación de la recta tangente.
d) El vector curvatura y radio de curvatura.
e) Ecuación del vector normal unitario y de la recta normal.
f) Ecuación del vector binormal y recta binormal.
g) Ecuaciones de los planos osculador, rectificante y normal en dichos puntos.

7) Una partícula se mueve a lo largo de una curva, cuyas ecuaciones son $x = 3 \cos 2t$; $y = 3 \cos 2t$; $z = 3$. Calcular el espacio recorrido durante el intervalo entre: $t = \pi/4$ y $t = \pi/2$.

TRABAJO PRACTICO Nº 9: Campos escalares y vectoriales

1) Si $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, hallar el gradiente de ϕ en el punto (1 ,-2 ,-1).

2) Hallar $\nabla\phi$, siendo $\phi = \ln |r|$ siendo $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

3) Demostrar que $\nabla\phi$ es un vector perpendicular a la superficie $\phi(x, y, z) = c$, siendo c una constante.

4) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ en P (1,-1,2).

5) Hallar la derivada direccional de $\phi = x^2yz + 4xz^2$ en P (1,-2,-1) y en la dirección y sentido de: $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

6) *Distribución de temperaturas*. La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es:
$$T(x;y) = 20 - 4x^2 - y^2$$
donde x, y se miden en centímetros. ¿En qué dirección crece más rápidamente la temperatura en el punto $(2;-3)$? ¿Cuál es ese ritmo de crecimiento?

7) Si $\vec{A} = 3xyz^2\,\vec{i} + 2xy^3\,\vec{j} - x^2yz\,\vec{k}$ y $\phi = 3x^2 - yz$, hallar en P (1,-1,1)
   a) Divergencia de $\vec{A} = (\nabla\cdot\vec{A})$
   b) $\vec{A}\cdot\nabla\phi$
   c) $\nabla(\phi\cdot\vec{A})$

8) Si $\vec{A} = xz^3\,\vec{i} - 2x^2yz\,\vec{j} + 2yz^4\,\vec{k}$
   Hallar $\nabla\wedge\vec{A} = (\text{rot } \vec{A})$ en el punto P (1, -1, 1)

9) Si $\vec{A} = 2xz^2\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + 3xz^3\,\vec{k}$ y $\phi = x^2yz$ hallar en P (1,1,1):
   a) $\nabla\wedge\vec{A}$.
   b) $\nabla\wedge(\phi\vec{A})$.

10) Probar las siguientes propiedades:
   a) $\text{Div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{Div}\,\vec{F} + \text{Div}\,\vec{G}$
   b) $\text{Rot}(f\cdot\vec{F}) = \text{Grad } f \times \vec{F} + f\cdot\text{Rot}\,\vec{F}$

Ejercicios Complementarios:

1) Si $\phi(x, y, z) = 2xz^4 - x^2y$, hallar el gradiente de ϕ en el punto (2 ,-2 ,-1).

2) Hallar $\nabla\phi$, siendo $\phi = \frac{1}{|\vec{r}|}$; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3) Hallar un vector unitario normal a la superficie $x^2y + 2xz = 4$ en el punto (2,-2,3).

4) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $xz^2 + x^2y = z - 1$ en P (1,-3,2).

5) Hallar la derivada direccional de $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ en P (2,-1,2) y en la dirección y sentido de: $2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

6) Hallar la derivada de $P = 4e^{2x-y+z}$ en el punto (1,1,-1) en dirección hacia el punto (-3,5,6).

7) Si $\vec{A} = x^2y\vec{i} - 2xz\vec{j} + 2z\vec{k}$, hallar el rot rot A = ∇x (∇ x $\vec{A}$)

8) Si $\vec{A} = 2yz\vec{i} - x^2y\vec{j} + xz^2\vec{k}$, $\vec{B} = x^2\vec{i} + yz\vec{j} - xy\vec{k}$ y $\phi = 2x^2yz^3$ hallar:

   a) $(\vec{A}\cdot\nabla)\phi$.
   b) $\vec{A}\cdot\nabla\phi$
   c) $(\vec{B}\cdot\nabla)\cdot\vec{A}$
   d) $(\nabla \times \vec{A})\phi$
   e) $\vec{A} \times \nabla\phi$

9) Hallar la derivada direccional de la superficie $\varphi : x^2y^2z + xz^2 = 0$ en P (1,-1,-1), en la dirección y sentido de $\vec{d}$: $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

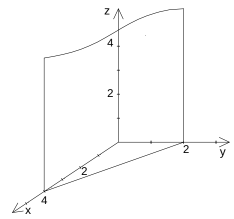
10) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\varphi : 2x^2 + 4y^2 - z = 0$ en P (2,1,12).

11) Dados $\vec{A} = 2x^2y\vec{i} + 3yz^3\vec{j} - xz^2\vec{k}$ y $\varphi : x^2z^3$, calcular la divergencia de ($\varphi\cdot\vec{A}$) en P (-1,1,1).

<u>Trabajo Práctico Nº 1: Funciones de varias variables</u>

Representación de superficies:

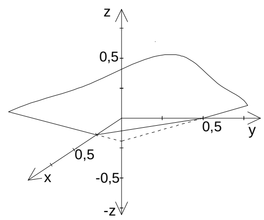
1. a) Plano



Trazas: Plano “xy”: $y = -\frac{1}{2}x + 2$; plano “xz”: $x = 4$; plano “yz”: $y = 2$.

Intersecciones con los ejes coordenados: eje x: $x = 4$; eje y:$y = 2$; eje z: no existe.

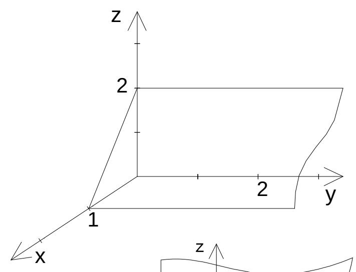
b) Plano



Trazas: Plano “xy”: $y = -2x + 1/2$; plano “xz”: $z = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$; plano “yz”: $z = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}$

Intersecciones con los ejes coordenados: eje x: $x = {}^{1}\!/_{4}$; eje y: $y = {}^{1}\!/_{2}$; eje z: $-{}^{1}\!/_{3}$.

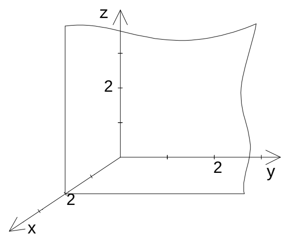
c)Plano paralelo al eje y: $2x + z = 2$



Trazas: Plano “xy”: $x = 1$; plano “xz”: $z = -2x + 2$; plano “yz”: $z = 2$.

Intersecciones con los ejes coordenados: eje x: $x = 1$; eje y: no tiene; eje z: $z = 2$.

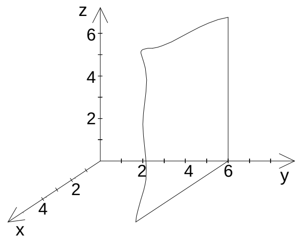
d) Plano



Trazas: Plano “xy”: $x = 2$; plano “xz”: $x = 2$; plano “yz”: no tiene.

Intersecciones con los ejes coordenados: eje x: $x = 2$; eje y: no tiene; eje z: no tiene.

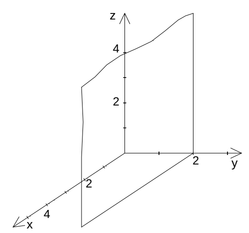
e) Plano



Trazas: Plano “xy”: $y = 6$; plano “xz”: no tiene; plano “yz”: $y = 6$.

Intersecciones con los ejes coordenados: eje x: no tiene; eje y: $y = 6$; eje z: no tiene.

f) Ecuación plano paralelo al plano xz: $y = 2$

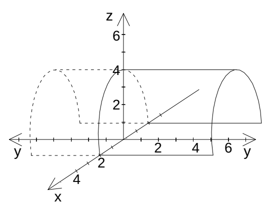


Trazas: Plano “xy”: $y = 2$; plano “xz”: no tiene; plano “yz”: $y = 2$.

Intersecciones con los ejes coordenados: eje x: no tiene; eje y: $y = 2$; eje z: no tiene.

g) Ecuación plano coordenado “xy”: $z = 0$; plano coordenado “xz”: $y = 0$; plano coordenado “yz”: $\mathrm{x} = 0$.

h) Superficie cilindrica elíptica



Trazas: Plano “xy”:$x = -2 \vee x = 2$;

plano “xz”:$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 \wedge z \geq 0$; plano “yz”:$z = 4$.

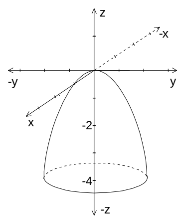
Intersecciones con los ejes coordenados:

eje x: $x = -2 \vee x = 2$; eje y: no tiene; eje z: $z = 4$.

i) Paraboloide elíptico

Trazas: Plano “xy”: $4x^2 + y^2 = 0$; plano “xz”: $z = -2x^2$; plano “yz”: $z = -\frac{1}{2}y^2$

Intersecciones con los ejes coordenados: eje x: $x = 0$; eje y: $y = 0$; eje z: $z = 0$.

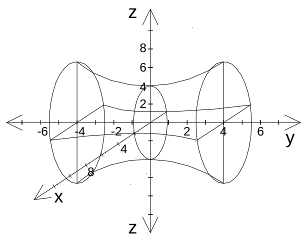


j) Hiperboloide de 1 hoja

Trazas: Plano “xy”: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; plano “xz”: $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$; plano “yz”: $-\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$

Intersecciones con los ejes coordenados:

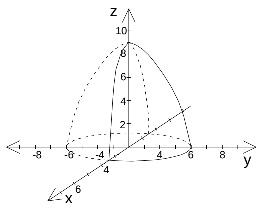
eje x: $x = -2 \vee x = 2$; eje y: no tiene; eje z: $z = -4 \vee z = 4$.



k) Paraboloide elíptico

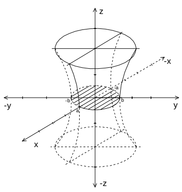
Trazas: Plano “xy”: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$; plano “xz”: $z = -x^2 + 9$; plano “yz”: $z = -\frac{y^2}{4} + 9$

Intersecciones con los ejes coordenados: eje x: $x = -3 \vee x = 3$; eje y: $y = -6 \vee y = 6$; eje z: $z = 9$.

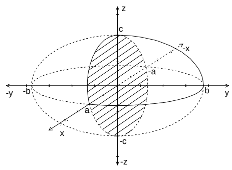


2)

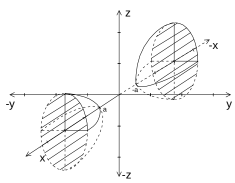
a) Hiperboloide de 1 hoja (no corta al eje “z”)



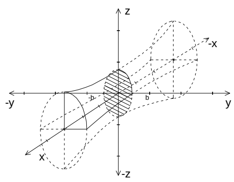
b) Elipsoide



c) Hiperboloide de 2 hojas (no corta al eje “y”)

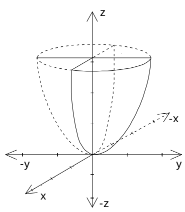


d) Hiperboloide de 1 hoja (no corta al eje “x”)

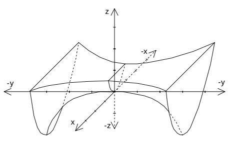


e) No tiene representación

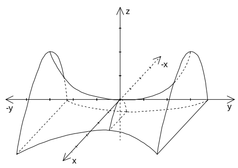
f) Paraboloide elíptico



g) Paraboloide hiperbólico

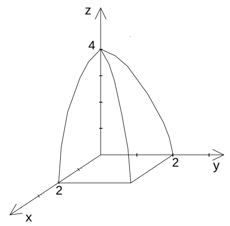


h) Paraboloide hiperbólico

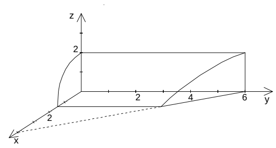


3)

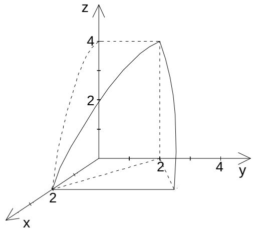
a)



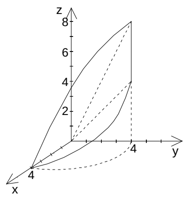
b)



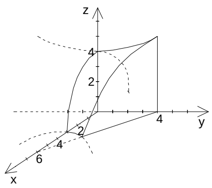
c)



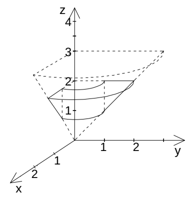
d)



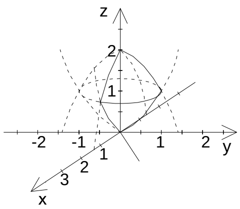
e)



f)



g)



h)$y^2 + z^2 = -4x$. Superficie: paraboloide de revolución.

Funciones de dos variables

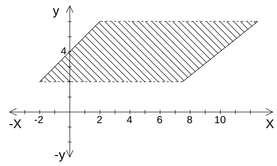
1) a) 0 b) -6 c) 7 d) -9

2) a) -1 b) 0 c) 0 d) 0 e) $\frac{a^2}{a^4-1}$

3) a) La función no está definida.

b) La función está definida.

4) **A)** a)



b) $A' = \{(x; y)/|x - y| \leq 4 \wedge |y - 4| \leq 2\}$

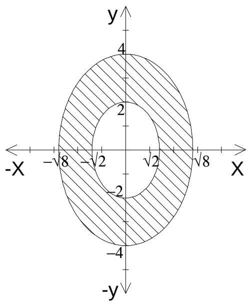
c) $A_i = \{(x; y)/|x - y| < 4 \wedge |y - 4| < 2\}$

d) No es conjunto abierto ni cerrado.

e) $A_f = \{(x; y)/(|x - y| = 4 \wedge |y - 4| < 2) \vee (|x - y| \leq 4 \wedge |y - 4| = 2)\}$

f) Conjunto Conexo.

B) a)



b) $B' = B$

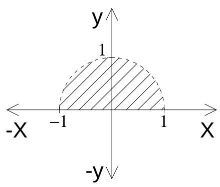
c) $B_i = \{(x; y)/2 < x^2 + \frac{y^2}{2} < 8\}$

d) El conjunto es cerrado.

e) $B_f = \{(x; y)/\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \vee \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1\}$

f) Conjunto conexo.

C) a)



b) $C' = \{(x; y)/x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$

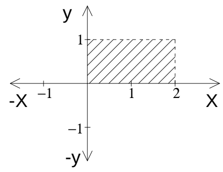
c) $C_i = \{(x; y)/x^2 + y^2 < 1 \wedge y > 0\}$

d) No es conjunto abierto ni cerrado.

e) $C_f = \{(x; y)/(x^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0) \vee (x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y = 0)\}$

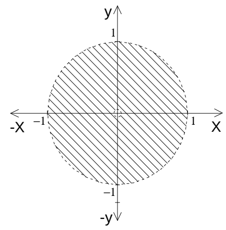
f) Conjunto conexo.

D) a)



b) $D' = \{(x;y)/0 \leq x \leq 2 \land 0 \leq y \leq 1\}$
c) $D_i = \{(x;y)/0 < x < 2 \land 0 < y < 1\}$
d) No es conjunto abierto ni cerrado.
e) $D_f = \{(x;y)/[(x = 0 \lor x = 2) \land 0 < y < 1] \lor [0 \leq x \leq 2 \land (y = 0 \lor y = 1)]\}$
f) Conjunto conexo.

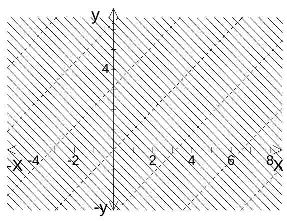
E) a)
$E = \{(x;y)/\ x^2 + y^2 > 0\} \cap \{(x;y)/\ x^2 + y^2 < 1\}$



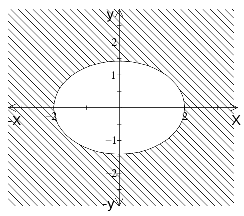
b) $E' = \{(x;y)/\ x^2 + y^2 \geq 0 \land\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
c) $E_i = \{(x;y)/\ x^2 + y^2 > 0 \land\ x^2 + y^2 < 1\}$
d) El conjunto es abierto.
e) $E_f = \{(x;y)/\ x^2 + y^2 = 0\ \lor x^2 + y^2 = 1\}$
f) Conjunto conexo.
5. a) $A = \{(x;y)/y \geq x^2 \land y \leq x + 2\}$
b) $B = \{(x;y)/\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \land x^2 + y^2 \geq 1\}$

Dominio e imagen de funciones de dos variables

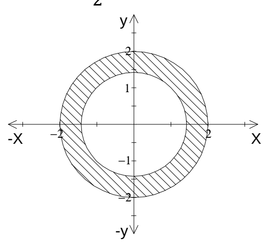
a) $Dom = \{(x;y)/y \neq x + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
$Rg = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.



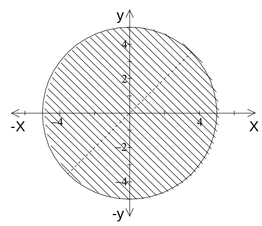
b) $Dom = \{(x;y)/\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \geq 1\}$;
$Rg = \mathbb{R}_0^+$.



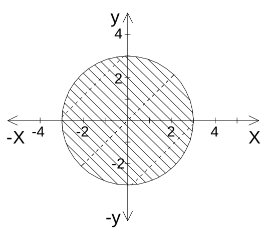
c) $Dom = \{(x;y)/2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;
$Rg = [0; \frac{\pi}{2}]$



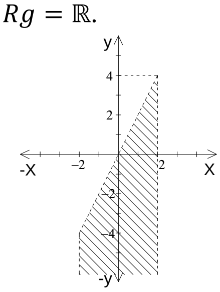
d) $Dom = \{(x;y)/x^2 + y^2 \leq 25 \land x \neq y\}$;
$Rg = \mathbb{R}$.



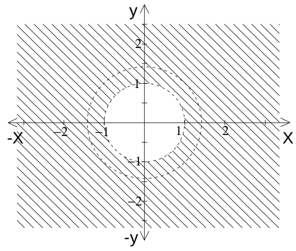
e) $Dom = \{(x;y)/x^2 + y^2 \leq 9 \land y \neq x + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
$Rg = \mathbb{R}$.



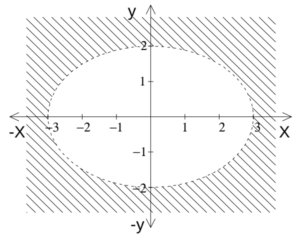
f) $Dom = \{(x;y)/y < 2x \land x^2 < 4\}$;
$Rg = \mathbb{R}$.



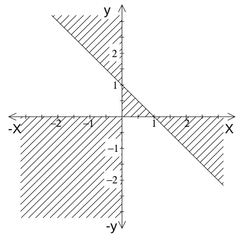
g) $Dom = \{(x;y)/x^2+y^2 \neq 2 \wedge x^2+y^2>1\}$;
$Rg = \mathbb{R}-\{0\}$.



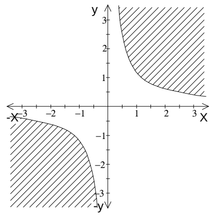
h) $Dom = \{(x;y)/\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1\}$;
$Rg = (0;\infty)$.



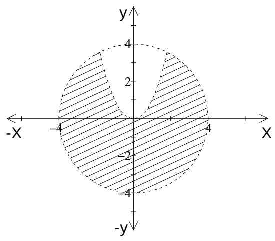
i) $Dom = \{(x;y)/(xy \geq 0 \wedge y \leq -x+1) \vee (xy \leq 0 \wedge y \geq -x+1)\}$; $Rg = \mathbb{R}_0^+$.



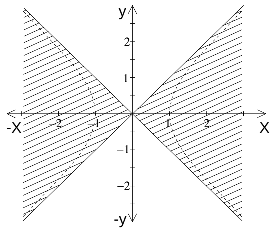
j) $Dom = \{(x;y)/xy \geq 5\}$; $Rg = \mathbb{R}_0^+$.



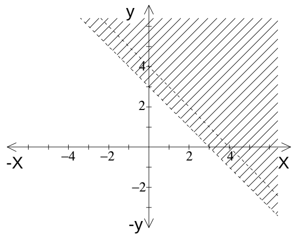
k) $Dom = \{(x;y)/y<x^2 \wedge x^2+y^2<16\}$;
$Rg = \mathbb{R}$.



l) $Dom = \{(x;y)/x^2-y^2 \neq 1 \wedge x^2>y^2\}$;
$Rg = \mathbb{R}-\{0\}$.

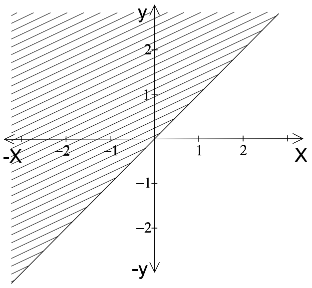


m) $Dom = \{(x;y)/y \neq -x+4 \wedge y>-x+3\}$;
$Rg = \mathbb{R}-\{0\}$.

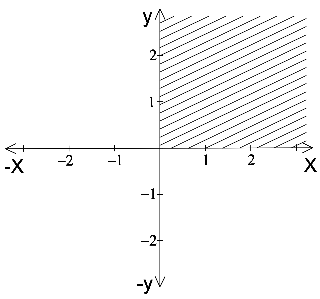


2)

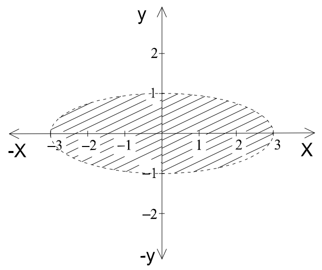
a) $Dom = \{(x;y)/y \geq -x\}$



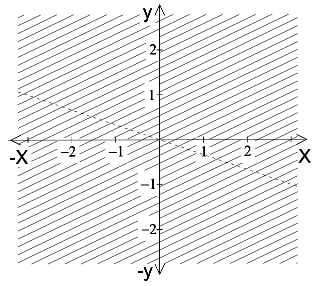
b) $Dom = \{(x;y)/x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$



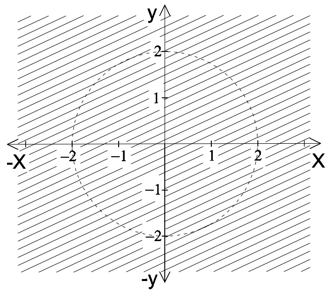
c) $Dom = \{(x;y)/\frac{x^2}{9} + y^2 < 1\}$



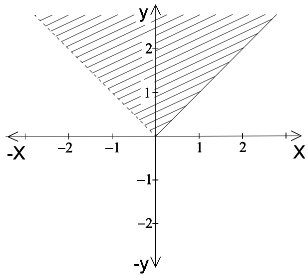
d) $Dom = \{(x;y)/y \neq -\frac{x}{3}\}$



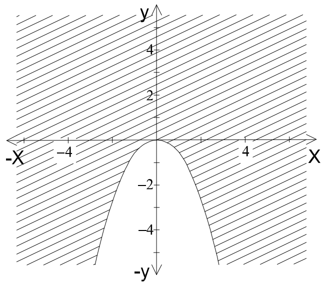
e) $Dom = \{(x;y)/x^2 + y^2 \neq 4\}$



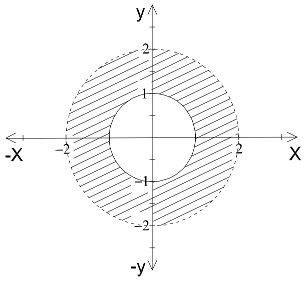
f) $Dom = \{(x;y)/y \geq x \wedge y > -x\}$



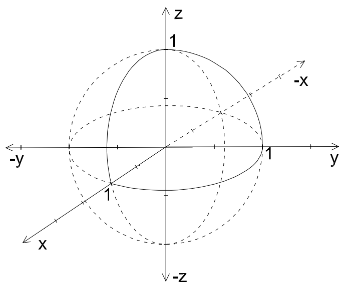
g) $Dom = \{(x;y)/y \geq -x^2\}$



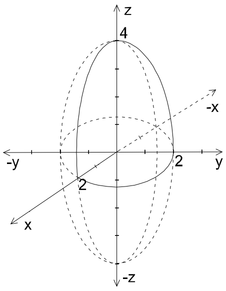
h) $Dom = \{(x;y)/x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 < 4\}$



i) $Dom = \{(x;y;z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\})$



j) $Dom = \{(x;y;z)/\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} < 1\}$



3) a) 0; b) 1; c) $Dom = \{(x;y)/y > -x + 1\}$; d) $Img = \mathbb{R}$
4) a) 1; b) $Dom = \mathbb{R}^2$; c) $Img = \mathbb{R}^+$;
5) a) $\sqrt{11}$; b) $Dom = \{(x;y)/\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$; c) $Img = [0;6]$
6) a) 0; b) $Dom = \{(x;y)/z > -x + y\}$; c) $Img = \mathbb{R}$
7) a) $1/5$; b) $Dom = \{(x;y)/x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$; c) $Img = \mathbb{R}^+$

Curvas de nivel

1.

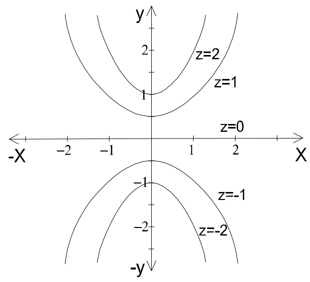
a) $z = -2 \to y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$z = -1 \to y = -x^2 - 1$

$z = 0 \to x = 0$

$z = 1 \to y = x^2 + 1$

$z = 2 \to y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$



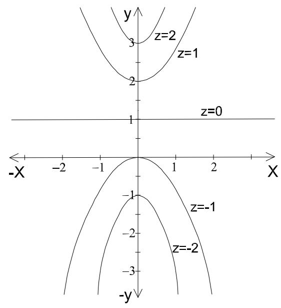
b) $z = -2 \to y = -2x^2 - 1$

$z = -1 \to y = -x^2$

$z = 0 \to y = 1$

$z = 1 \to y = x^2 + 2$

$z = 2 \to y = 2x^2 + 3$



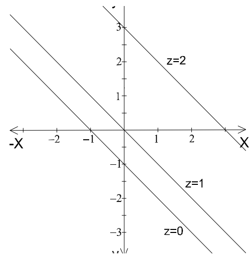
c) $z = -2 \to \nexists\ curva\ de\ nivel$

$z = -1 \to y = \nexists\ curva\ de\ nivel$

$z = 0 \to y = -x - 1$

$z = 1 \to y = -x$

$z = 2 \to y = -x + 3$



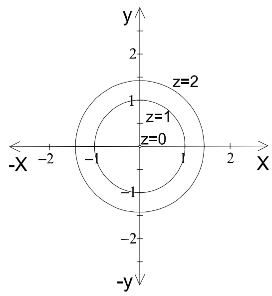
d) $z = -2 \to \nexists\ curva\ de\ nivel$

$z = -1 \to \nexists\ curva\ de\ nivel$

$z = 0 \to x^2 + y^2 = 0$

$z = 1 \to x^2 + y^2 = 1$

$z = 2 \to x^2 + y^2 = 2$



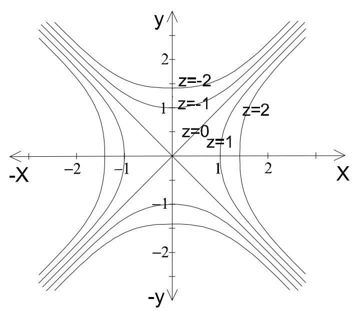
e) $z = -2 \to \frac{-x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$

$z = -1 \to -x^2 + y^2 = 1$

$z = 0 \to y = \pm x$

$z = 1 \to x^2 - y^2 = 1$

$z = 2 \to \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$



2.

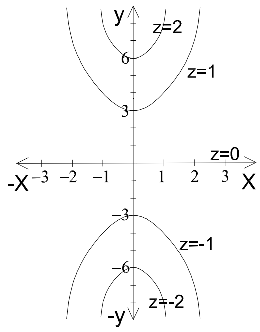
a) $z=-2 \rightarrow y=-2x^2-6$

$z=-1 \rightarrow y=-x^2-3$

$z=0 \rightarrow y=0$

$z=1 \rightarrow y=x^2+3$

$z=2 \rightarrow y=2x^2+6$



b)

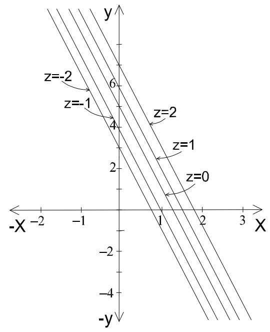
$z=-2 \rightarrow y=-4x+3$

$z=-1 \rightarrow y=-4x+4$

$z=0 \rightarrow y=-4x+5$

$z=1 \rightarrow y=-4x+6$

$z=2 \rightarrow y=-4x+7$

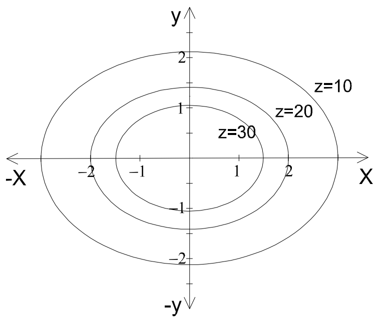


3. $z=T(x;y)$

$z=10 \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9/2}=1$

$z=20 \rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

$z=30 \rightarrow \frac{x^2}{7/3}+\frac{y^2}{7/6}=1$



4. $x^2+y^2=r^2-(\frac{c}{v})^2$

5. Ec. a y gráf. I; Ec. b y gráf. III; Ec. c y graf. II.

<u>TRABAJO PRACTICO Nº 2: Límites</u>

Límites

$L=\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(x_1,y_1)} f(x,y)$; $L_1=\lim\limits_{x\rightarrow x_1}\lim\limits_{y\rightarrow y_1} f(x,y)$; $L_2=\lim\limits_{y\rightarrow y_1}\lim\limits_{x\rightarrow x_1} f(x,y)$; $L_r=\lim\limits_{x\rightarrow x_1}\lim\limits_{y\rightarrow g(x)} f(x,y)$.

1) $L=\nexists$; $L_1=1/2$; $L_2=-1/2$. 2) $L=\nexists$; $L_1=-\frac{2}{3}$; $L_2=-1/2$

3) $L=\nexists$; $L_1=1$; $L_2=-3/2$. 4) $L=\nexists$; $L_1=0$; $L_2=0$

5) $L=3$; $L_1=3$; $L_2=3$. 6) $L=0$; $L_1=0$; $L_2=0$

7) $L=\nexists$; $L_1=0$; $L_2=0$; sobre $y=x$: $L_r=1$

8) $L=\nexists$; $L_1=3$; $L_2=1$. 9) $L=0$; $L_1=0$; $L_2=0$

10) $L=-1$; $L_1=-1$; $L_2=-1$. 11) $L=0$; $L_1=0$; $L_2=0$

12) $L=\nexists$; $L_1=0$; $L_2=0$; sobre $y=x$: $L_r=1/2$

13) $L=0$;$L_1=0$; $L_2=0$

14) $L=\nexists$; $L_1=0$; $L_2=0$; sobre $y=x^2$: $L_r=1/2$

15) $L=1$; $L_1=1$; $L_2=1$. 16) $L=3/2$; $L_1=3/2$; $L_2=3/2$

17) $L=\nexists$; $L_1=3/4$; $L_2=-2/5$; sobre $y=4x$: $L_r=-11/16$

18) $L=0$; $L_1=0$; $L_2=0$

Continuidad

1) a) $f(0;0)=3$; $L=0$; $f(0;0)\neq L \Rightarrow f(x;y)$ es discontínua en $(0;0)$.
b) $f(0;0)=0$; $\nexists\, L \Rightarrow f(x;y)$ es discontínua en $(0;0)$.
c) $f(0;0)=0$; $L=0$; $f(0;0)=L \Rightarrow f(x;y)$ es contínua en $(0;0)$.
2) a) Contínua. b) Discontínua. c) Discontínua. d) Contínua. e) Discontínua.
3) a) $\{(x;y)/xy\neq 0\}$; b) $\{(x;y)/y<x\}$; c) $\{(x;y)/\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}<1\}$
d) $\{(x;y)/(x+y)^2\neq \pi/2+k\pi; k\in\mathbb{Z}\}$; e) $\{(x;y)/y\neq -3/5\,x\}$
f) $\{(x;y)/y\neq 0\}$
4) a) No se puede redefinir la función porque esta no posee límite; b) $f(0;0)=0$;
c) $f(0;0)=2/5$

<u>Trabajo Práctico Nº 3: Derivadas y diferenciales primeras</u>

Derivadas parciales

a) $F'_x(1;2)=48$; $F'_y(1;2)=36$. b) $F'_x(2;1)=8$; $F'_y(2;1)=-8$. c) $F'_x(0;0)=1$; $F'_y(0;0)=1$.
d) $F'_x(2;3)=\sqrt{5}/10$; $F'_y(2;3)=\sqrt{5}/10$. e) $F'_x(2;2)=6$; $F'_y(2;2)=15$
f) $F'_x(1;1)=\sqrt{2}/2$; $F'_y(1;1)=\sqrt{2}/2$

2) a) $F'_x=e^{x-y^2}$; $F'_y=-2ye^{x-y^2}$

b) $F'_x=\frac{3}{2(3x-y)\sqrt{\ln(3x-y)}}$; $F'_y=\frac{-1}{2(3x-y)\sqrt{\ln(3x-y)}}$

c) $F'_x=\frac{y}{3\sqrt[3]{x^2y}}sen(xy)+y\sqrt[3]{xy^2}cos(xy)$; $F'_y=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2y}}sen(xy)+x\sqrt[3]{xy^2}cos(xy)$

d) $F'_x=2.4^y xy+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$; $F'_y=x^2 4^y(y.ln4+1)-\frac{x}{y.\sqrt{y^2-x^2}}$

e) $F'_x=\frac{xy^2e^{xy}\,[x^2y+x(2y^2+1)+4y]}{(x+2y)^2}$; $F'_y=\frac{x^2ye^{xy}\,(x^2y+2x(y^2+1)+2y)}{(x+2y)^2}$

f) $F'_x=\frac{x[2(x^2+y^2)\mathrm{arctg}(y/x)-xy]}{y^2(x^2+y^2)}$; $F'_y=-\frac{x^2[-2(x^2+y^2)\mathrm{arctg}(^x/_y)+xy]}{y^3(x^2+y^2)}$

g) $F'_x=\frac{\left(\frac{2xy}{1+x^4}+\frac{1}{x}\right)(xy^2+1)-[y.\mathrm{arctg}(x^2)+\ln(2x)]y^2}{(xy^2+1)^2}$

$F'_y=-\frac{(xy^2-1)\mathrm{arctg}(x^2)+2xy\ln(2x)}{(xy^2+1)^2}$

h) $F'_x=\frac{3xe^{xy}[(2+yx)(2y^2+x)-x]}{(2y^2+x)^2}$; $F'_y=\frac{3x^2e^{xy}(x^2+2xy^2-4y)}{(2y^2+x)^2}$

i) $F'_x=e^{xy}[y.\tan\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y.\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}]$; $F'_y=e^{xy}[x.\tan\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2.\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}]$

j) $F'_x=\frac{2y^2e^{xy}(xy-y^2-1)}{(x-y)^2}$; $F'_y=\frac{2ye^{xy}[(2+yx)(x-y)+y]}{(x-y)^2}$

$F'_x(2;1)=0$; $F'_y(2;1)=10e^2$

3) a) $x.z'_x+y.z'_y=x.\left[\frac{\sqrt{x}.\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y}+\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}{2\sqrt{x}}\right]+y.\frac{-\sqrt[2]{x^3}.\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}=\frac{\sqrt[2]{x^3}.\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y}+\frac{\sqrt{x}.\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}{2}-\frac{\sqrt[2]{x^3}.\cos(\frac{x}{y})}{y}=\frac{\sqrt{x}.\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}{2}=\frac{z}{2}$

b) $x.z'_x+y.z'_y=x.\left[\left(2x+\frac{y^3}{x^2}\right).sen\left(\frac{y}{x}\right)-y.\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]+y.[(x+2y).\cos\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2.sen\left(\frac{y}{x}\right)}{x}]=\frac{(2x^3+y^3).sen\left(\frac{y}{x}\right)}{x}-xy.\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y(x+2y).\cos\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^3.sen\left(\frac{y}{x}\right)}{x}=2x^2.sen\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^3.sen\left(\frac{y}{x}\right)}{x}-xy.\cos\left(\frac{y}{x}\right)+xy.\cos\left(\frac{y}{x}\right)+2y^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^3.sen\left(\frac{y}{x}\right)}{x}=\quad 2y^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)+2x^2sen\left(\frac{y}{x}\right)=2[y^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x^2sen\left(\frac{y}{x}\right)]=2z$

c) $x.z'_x+y.z'_y=x\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+y\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$

4) $Z'_y(0;4)=0$

Diferenciales

1) a) $dz = (6x^2 - 4y^2)dx + (9y^2 - 8xy)dy$. b) $dz = 2x.\cos(2y)\,dx - 2x^2.sen(2y)dy$
c) $dz = [\ln(x+y) + \frac{x-y}{x+y}]dx + [\frac{x-y}{x+y} - \ln(x+y)]dy$. d) $du = y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz$
2) $\Delta u = 91/4 = 22{,}75$; $du = 112/5 = 22{,}4$
3) $\Delta z = 99/1250$; $dz = 2/25$
4) $dz = 1$
5) $dz = -0{,}1516$
6) $0{,}9785$
7) $2{,}01$
8) La función no es diferenciable en el origen porque no es contínua.
9) $\varepsilon_a = 8{,}4$. $\varepsilon_{\%} = 0{,}75\%$.
10) Altura: $\varepsilon_a = \frac{\sqrt{3}}{15}$; $\varepsilon_{\%} = 1{,}11\%$. Volumen: $\varepsilon_a = \frac{67+96\sqrt{3}}{10}\pi$; $\varepsilon_{\%} = 3{,}35\%$.
11) $-0{,}011$
12) $-41/900$; $-0{,}6212\%$
13) $0{,}00177$
14) $16{,}31\ cm/seg^2$
15) $\frac{dt}{t} = \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p}$
16) $-54{,}49\text{Kg/m}^2$

Trabajo Práctico Nº 4: Funciones compuestas e implícitas

Funciones compuestas

1) 51
2) 0
3) $\frac{\partial z}{\partial u} = 1001$; $\frac{\partial z}{\partial v} = 413$
4) $\frac{dz}{dt} = 2$
5) $\frac{dz}{dt} = -9$
6) $\frac{du}{dt} = 18$
7) $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \left[\left(lny + \frac{y}{x}\right).e^{u+v} + \left(\frac{x}{y} + lnx\right).e^{u-v}\right] + \left[\left(lny + \frac{y}{x}\right).e^{u+v} + \left(\frac{x}{y} + lnx\right).(-e^{u-v})\right] = 2\left(lny + \frac{y}{x}\right)e^{u+v}$
8) $Z'_u + Z'_v = \frac{y-x}{x^2+y^2} + \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2(u-v)}{(u+v)^2+(u-v)^2} = \frac{2(u-v)}{u^2+2uv+v^2+u^2-2uv+v^2} = \frac{2(u-v)}{2(u^2+v^2)} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$
9) -12
10) $40e^2 + 20e \approx 349{,}92788$

Funciones implícitas

1) a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^4+y^2+1}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt[3]{y^2}}{3\sqrt[6]{y}+2}$; c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-ay}{ax-y^2}$; d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; e) $\frac{dy}{dx} = \frac{ctg(xy)}{x^2} - \frac{y}{x}$

2) a) $2^3 - (-2)^3 + 4.2.(-2) = 0$; $\frac{dy}{dx} = 1$; b) $2.2 - \sqrt{2.2.4} + 4 = 4$; $\frac{dy}{dx} = -2$; c) $e^0\cos(0+0) - 0 = 1$; $\frac{dy}{dx} = 1$ d) $2^2 + 2.3 + 2.3^2 = 28$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$; e) $\sqrt{2.2} + \sqrt{3.3} = 5$; $\frac{dy}{dx} = -1$; f) $a^3 - a.a.a + 3aa^2 = 3a^3$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}$

3) a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$; b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1-2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3z}{1-2z}$; c) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z[2y.\cos(xyz)+3x^2]}{x[2y.\cos(xyz)+x^2]}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2-2xz.\cos(xyz)}{x[2y.\cos(xyz)+x^2]}$; d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz^2e^{xy-2}+2}{1-2ze^{xy-2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz^2e^{xy-2}-4}{1-2ze^{xy-2}}$

4) $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{4y}$; $\frac{dz}{dy} = -4y$; b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{12v-1}{8uv-1}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3-2u}{8uv-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(2v+1)}{8uv-1}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4u+1}{8uv-1}$

5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1-2ux}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2vx}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2uy}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2vy+1}{x^2+y^2}$

Trabajo Práctico Nº 5: Derivadas y diferenciales sucesivas

Derivadas sucesivas

1) a) $Z''_{xy} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = Z''_{yx}$; b) $Z''_{xy} = \frac{(ad-bc)(cx-dy)}{(cx+dy)^3} = Z''_{yx}$

2) a) $Z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $Z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$; $Z''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $Z''_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = Z''_{yx}$; $Z''_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

b) $Z'_x = y^2 x^{y^2-1}$; $Z'_y = 2yx^{y^2}\ln(x)$; $Z''_{xx} = y^2 x^{y^2-2}(y^2-1)$;
$Z''_{xy} = x^{y^2-1}[2y^3\ln(x) + 2y] = Z''_{yx}$; $Z''_{yy} = x^{y^2}[4y^2 ln^2(x) + 2\ln(x)]$

c) $Z'_x = e^x\ln(y) + \frac{sen(y)}{x}$; $Z'_y = \frac{e^x}{y} + \ln(x).\cos(y)$; $Z''_{xx} = e^x\ln(y) - \frac{sen(y)}{x^2}$; $Z''_{xy} = \frac{e^x}{y} + \frac{cos(y)}{x} = Z''_{yx}$; $Z''_{yy} = -\frac{e^x}{y^2} - \ln(x)\,sen(y)$

d) $Z'_x = -\frac{sen[\ln(xy)]}{x}$; $Z'_y = -\frac{sen[\ln(xy)]}{y}$; $Z''_{xx} = \frac{sen[\ln(xy)]}{x^2} - \frac{cos[\ln(xy)]}{x^2}$; $Z''_{yy} = \frac{sen[\ln(xy)]}{y^2} - \frac{cos[\ln(xy)]}{y^2}$; $Z''_{xy} = -\frac{cos[\ln(xy)]}{xy} = Z''_{yx}$

3) a) $Z''_{xx} - 4Z''_{yy} = [-4\cos(2x+y) - 4sen(2x-y)] - 4[-\cos(2x+y) - sen(2x-y)] = -4[\cos(2x+y) + sen(2x-y)] + 4[\cos(2x+y) + sen(2x-y)] = 0$

b) $Z''_{xx} + Z''_{yy} = [-e^{-t}sen(x)] + [-e^{-t}cos(y)] = -e^{-t}[sen(x) + cos(y)] = Z'_t$

Diferenciales Sucesivas

1) $d^2z = (48x^2y^2 + 2y^3)(dx)^2 + [4xy(16x^2 + 3y)]dx.dy + (8x^4 + 6x^2y)(dy)^2$

2) $d^3z = \left[4xe^{x^2+y^2}(2x^2+3)\right](dx)^3 + \left[12ye^{x^2+y^2}(2x^2+1)\right](dx)^2dy + \left[12xe^{x^2+y^2}(2y^2+1)\right]dx(dy)^2 + \left[4ye^{x^2+y^2}(2y^2+3)\right](dy)^3$

Series de Taylor y Mac Laurin

1) a) $-\frac{16x^2+8\pi x(y-2)+\pi^2y^2-4\pi^2y+4\pi^2-8}{8}$; b) $\frac{2x(y+1)+y^2}{2}$

2) a) $\frac{e^2[x^3+3x^2(2y-1)+6x(2y^2-2y+1)+2(4y^3-6y^2+6y-1)]}{6}$; b) $-\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \left(y-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + 3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\pi}{2}\right)^3]$

c) $-\frac{x^3}{6} + x - 2y^2$; d) $\frac{y[3x^2+3x(2-y)+2y^2-3y+6]}{6}$

3) a) Entorno del origen:

$F(0;0) = 0$; $F'_x(0;0) = 0$; $F'_y(0;0) = 1$; $F''_{xx}(0;0) = 0$; $F''_{xy}(0;0) = \ln(a)$; $F''_{yy}(0;0) = -1$; $F'''_{xxx}(0;0) = 0$; $F'''_{xxy}(0;0) = ln^2(a)$; $F'''_{xyy}(0;0) = -\ln(a)$; $F'''_{yyy}(0;0) = 2$

$$\begin{aligned} z \approx\ & F(0;0) + F'_x(0;0)x + F'_y(0;0)y + \frac{1}{2!}\left[F''_{xx}(0;0)x^2 + 2F''_{xy}(0;0)xy + F''_{yy}(0;0)y^2\right] \\ & + \frac{1}{3!}\left[F'''_{xxx}(0;0)x^3 + 3F'''_{xxy}(0;0)x^2y + 3F'''_{xyy}(0;0)xy^2 + F'''_{yyy}(0;0)y^3\right] + \cdots \\ & = 0 + 0x + 1y + \frac{1}{2!}\left[0x^2 + 2\ln(a)\,xy + (-1)y^2\right] + \frac{1}{3!}\{0x^3 + 3ln^2(a)x^2y \\ & + 3[-\ln(a)]xy^2 + 2y^3\} + \cdots \\ & = y + \frac{1}{2}\left[2xyln(a) - y^2 + x^2yln^2(a) - xy^2ln(a)\right] + \frac{1}{3}y^3 + \cdots \end{aligned}$$

b) Entorno del origen:

$F(0;0) = 0$; $F'_x(0;0) = 1$; $F'_y(0;0) = 1$; $F''_{xx}(0;0) = 0$; $F''_{xy}(0;0) = 0$; $F''_{yy}(0;0) = 0$; $F'''_{xxx}(0;0) = F'''_{xxy}(0;0) = F'''_{xyy}(0;0) = F'''_{yyy}(0;0) = -1$

$$\begin{aligned} z &\approx 0 + 1x + 1y + \frac{1}{2!}\left[0x^2 + 2.0xy + 0y^2\right] + \frac{1}{3!}\left[-1x^3 + 3(-1)x^2y + 3(-1)xy^2 + (-1)y^3\right] \\ &= x + y - \frac{\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right)}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

Extremos Relativos

1) a) $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ mínimo relativo; b) $\nexists$ extremos relativos; c) $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0)$ mínimo relativo; d) $(1;1;3)$ mínimo relativo; e) $(1;0;-2)$ mínimo relativo; $(-1;0;2)$ punto de ensilladura f) $(1;4;-19)$ mínimo relativo; g) $(0;0;5)$ máximo relativo; h) $(0;1;\frac{4}{3})$ máximo relativo; $(0;3;0)$ punto de

ensilladura; $(2;1;-\frac{20}{3})$ punto de ensilladura; $(2;3;-8)$ mínimo relativo; $\left(-5;1;-\frac{1109}{12}\right)$ punto de ensilladura; $(-5;3;-\frac{375}{4})$ mínimo relativo; i) $(0;0;0)$ mínimo relativo; j) $(-1;\frac{1}{2};\sqrt[4]{e^9})$ máximo relativo; k) $(1;0;0)$ mínimo relativo; l) $(0;0;0)$ punto de ensilladura; m) $\nexists$ extremos relativos; n) $(0;0;0)$ punto de ensilladura; $(\frac{3}{4};\frac{3}{8};-\frac{27}{32})$ mínimo relativo; o) $(\sqrt{2};\sqrt{3};-6\sqrt{3}-4\sqrt{2}+2)$ mínimo relativo; $(\sqrt{2};-\sqrt{3};6\sqrt{3}-4\sqrt{2}+2)$ punto de ensilladura; $(-\sqrt{2};\sqrt{3};-6\sqrt{3}+4\sqrt{2}+2)$ punto de ensilladura; $(-\sqrt{2};-\sqrt{3};6\sqrt{3}+4\sqrt{2}+2)$ máximo relativo.

2) $k=2$, mínimo relativo.

3) $k=3$, mínimo relativo.

Trabajo Práctico Nº 6: Integrales paramétricas

1) a) $y^2(e-1)$; b) $-6arctg\sqrt{y^2-16}$; c) x^2; d) $\frac{\pi\sqrt{y}}{2}$; e) $2\sqrt{3x}\cdot arctg\left(\frac{\sqrt{3x}}{3}\right)+x.\ln(x^2+3x)-2x$

2) a) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2}$; b) $2y$

3) a) $\frac{\pi a^2}{2}$; b) $Ln(\frac{9}{8})$; c) 1

Trabajo Práctico Nº 7: Integrales Múltiples

1) $\frac{\pi}{2}$

2) a) $\frac{b^2}{3}$; b) $\sqrt{2}-1$; c) $\frac{1}{10}$ d) 2π

3) $2a^2(\frac{\pi}{3}+\sqrt{3})$

4) a) $\frac{abc}{6}$; b) $\frac{b^3\pi}{4}-\frac{b^3}{3}$; c) 36π

5) $x_G=2$; $y_G=3$; $M_x=\frac{27}{2}$; $M_y=9$

6) $\frac{4}{3}(8-3\sqrt{3})a^3\pi$

7) a) $I_x=\frac{63}{20}$; $I_y=\frac{729}{140}$; b) $I_x=\frac{1}{28}$; $I_y=\frac{1}{20}$

8) $z_G=\frac{15}{8}$; por simetría: $x_G=y_G=0$

9) $\frac{96\pi}{5}$; 10) $\frac{64\pi}{3}$

Trabajo Práctico Nº 8: Geometría diferencial

1) a) $6\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-5\vec{k}$; $7\vec{\imath}-10\vec{\jmath}+10\vec{k}$; b) -2; 7; -5; c) $-1\vec{\imath}+13\vec{\jmath}+8\vec{k}$; $-4\vec{\imath}-5\vec{\jmath}-6\vec{k}$; d) -19

2) a) $\frac{dr}{dt}=4\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-e\vec{k}$; $\frac{d^2r}{dt^2}=4\vec{\imath}+6\vec{\jmath}-e\vec{k}$; $\left|\frac{dr}{dt}\right|=\sqrt{e^2+25}$; $\left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|=\sqrt{e^2+52}$

b) $\frac{dr}{dt}=-2\vec{\imath}-3\vec{k}$; $\frac{d^2r}{dt^2}=-3\vec{\jmath}$; $\left|\frac{dr}{dt}\right|=\sqrt{13}$; $\left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|=3$

3) a) $\vec{A}=a_1(t)\vec{\imath}+a_2(t)\vec{\jmath}+a_3(t)\vec{k}$; $\vec{B}=b_1(t)\vec{\imath}+b_2(t)\vec{\jmath}+b_3(t)\vec{k}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \frac{d}{dt}\{[a_1(t)\vec{\imath}+a_2(t)\vec{\jmath}+a_3(t)\vec{k}]\cdot[b_1(t)\vec{\imath}+b_2(t)\vec{\jmath}+b_3(t)\vec{k}]\}\\ &= \frac{d}{dt}[a_1(t)\cdot b_1(t)+a_2(t)\cdot b_2(t)+a_3(t)\cdot b_3(t)]\\ &= \frac{d}{dt}[a_1(t)\cdot b_1(t)]+\frac{d}{dt}[a_2(t)\cdot b_2(t)]+\frac{d}{dt}[a_3(t)\cdot b_3(t)]\\ &= a_1'(t)\cdot b_1(t)+a_1(t)\cdot b_1'(t)+a_2'(t)\cdot b_2(t)+a_2(t)\cdot b_2'(t)+a_3'(t)\cdot b_3(t)\\ &\quad +a_3(t)\cdot b_3'(t)\\ &= a_1'(t)\cdot b_1(t)+a_2'(t)\cdot b_2(t)+a_3'(t)\cdot b_3(t)+a_1(t)\cdot b_1'(t)+a_2(t)\cdot b_2'(t)\\ &\quad +a_3(t)\cdot b_3'(t)=\frac{d}{dt}(\vec{A})\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{B})\end{aligned}$$

b) $\vec{A} = a_1(t)\vec{\imath} + a_2(t)\vec{\jmath} + a_3(t)\vec{k}$; ϕ: función escalar

$$\frac{d}{dt}(\phi\vec{A}) = \frac{d}{dt}\left[\phi a_1(t)\vec{\imath} + \phi a_2(t)\vec{\jmath} + \phi a_3(t)\vec{k}\right]$$
$$= [\phi' a_1(t) + \phi a_1'(t)]\vec{\imath} + [\phi' a_2(t) + \phi a_2'(t)]\vec{\jmath} + [\phi' a_3(t) + \phi a_3'(t)]\vec{k}$$
$$= \phi a_1'(t)\vec{\imath} + \phi a_2'(t)\vec{\jmath} + \phi a_3'(t)\vec{k} + \phi' a_1(t)\vec{\imath} + \phi' a_2(t)\vec{\jmath} + \phi' a_3(t)\vec{k}$$
$$= \phi\left[a_1'(t)\vec{\imath} + a_2'(t)\vec{\jmath} + a_3'(t)\vec{k}\right] + \left[a_1(t)\vec{\imath} + a_2(t)\vec{\jmath} + a_3(t)\vec{k}\right]\phi'$$
$$= \phi\frac{d}{dt}(\vec{A}) + \vec{A}\frac{d}{dt}(\phi)$$

4) $|\vec{v}| = 0$; $|\vec{a}| = 12\sqrt{12}$

5) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$; $-\frac{\sqrt{14}}{7}$

6) a) $-\vec{\jmath} + \vec{k}$; b) $\frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$; c) Ec. recta tangente: $\bar{Y} = \vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}t\vec{\jmath} + (\frac{\sqrt{2}t}{2} + \frac{\pi}{2})\vec{k}$; d) $\bar{K}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\vec{\imath}$; $R = 2$; e) $\bar{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{\imath}$; Ec. la recta normal: $(1-t)\vec{\imath} + \frac{\pi}{2}\vec{k}$; f) $\bar{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$; Ec. la recta binormal: $\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}t\vec{\jmath} + (\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}t}{2})\vec{k}$; g) Ec. plano normal: $-\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 0$; Ec. plano rectificante: $-x + 1 = 0$; Ec. plano osculador: $-\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 0$

7) $3\sqrt{2}$

Trabajo Práctico Nº 9: Campos escalares y vectoriales

1) $10\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 16\vec{k}$

2) $-\frac{x}{r^3}\vec{\imath} - \frac{y}{r^3}\vec{\jmath} - \frac{z}{r^3}\vec{k}$

3) $-\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}$

4) $-2x + y + 3z - 1 = 0$

5) $\frac{376}{7}$

6) $-\frac{20}{9}$

7) $2x\vec{\jmath}$

8) a) $2x^3yz^3(2z - x)$; b) $-2x^4yz^3 + 6x^3yz^4 + 8xy^2z^4$

c) $2yz(2x+z)\vec{\imath} - x^2y(2x+z)\vec{\jmath} + xz^2(2x+z)\vec{k}$

d) $2x^2yz^3(2y - z^2)\vec{\jmath} - 4x^2yz^3(xy + z)\vec{k}$

e) $(-6x^4y^2z^2 - 2x^3z^5)\vec{\imath} + x^2(4yz^5 - 12y^2z^3)\vec{\jmath} + (4x^3y^2z^3 + 4x^2yz^4)\vec{k}$

9) $-7/3$

10) $8x + 8y - z - 12 = 0$

11) 0

Apéndice elaborado por Ing. Manuel Zeniquel – 2018.